


НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ

А. Кофман Х. Хил Алуха



МОДЕЛИ
ДЛЯ
ИССЛЕДОВАНИЯ
СКРЫТЫХ
ВОЗДЕЙСТВИЙ

Новые математические модели и методы в управлении

А. КОФМАН Х. ХИЛ АЛУХА

МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Перевод с испанского
под редакцией
В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1993

Кофман А., Хил Алуха Х. Модели для исследования скрытых воздействий: Пер. с исп. — Мн.: Выш. шк., 1993. — 160 с.: ил. — (Новые мат. модели и методы в управлении.) — ISBN 5-339-01016-3.

Предложены методы выявления скрытых, не учтенных экспертами воздействий при анализе и оценке причинно-следственных отношений множества отдельных факторов на себя или на множество других факторов. Рассмотрены случаи, когда оценки задаются в виде нечетких чисел или доверительных интервалов и допускается или не допускается согласование мнений экспертов. Приведены примеры использования методов при управлении избирательной кампанией, финансами, оценкой коммерческого имиджа и целей предприятий.

Для специалистов по менеджменту, математическому моделированию и студентов соответствующих специальностей вузов.

Табл. 51. Ил. 21. Библиогр.: 7 назв.

Серия основана в 1992 г.

Перевод с испанского
под редакцией В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

0601000000-035

К _____ БЗ 139-93

М304(03)-93

ISBN 5-339-01016-3

© Перевод на русский язык, предисловие
В.В.Краснопрошин, Н.А.Лепешинский, 1993
© Оформление. Издательство «Вышэйшая школа»,
1993

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА	5
ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ	7
I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ. МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОНЯТИЕ ИНЦИДЕНЦИИ	9
1. Введение	9
2. Инциденты первого порядка	10
3. Инциденты второго и более высоких порядков	13
4. Использование нечетких матриц	18
5. Пример исследования скрытых воздействий с помощью матриц инцидентов	23
6. Второй пример (с прямоугольной матрицей)	27
7. Использование Ф-нечетких матриц	30
8. Использование доверительных троек	34
9. Использование случайных нечетких матриц	35
10. Использование экспертов	40
11. Промежуточные причины скрытых воздействий	49
12. Некоторые свойства нечетких рефлексивных матриц	66
13. Некоторые дополнительные приемы выявления скрытых воздействий	67
II. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПОИСКА СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОБЩЕСТВЕННОЙ, ФИНАНСОВОЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ОБЛАСТЯХ	70

14. Скрытые воздействия при организации избирательной кампании	70
15. Скрытые воздействия в финансовой области	83
16. Скрытые воздействия при определении коммерческого имиджа предприятия	98
17. Восстановление скрытых воздействий при определении целей предприятия	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	156
БИБЛИОГРАФИЯ	158

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Данная монография известного французского специалиста в области исследования операций профессора Арнольда Кофмана и его испанского коллеги профессора Хайме Хила Алухи опубликована в 1989 г. и является, насколько нам известно, первым систематизированным изложением математических методов проверки качества экспертных числовых оценок о влиянии (инцидентов) каких-либо факторов на определенные свойства изучаемых систем из любой области человеческой деятельности. Обычно эксперты оценивают это влияние только непосредственно для пар "фактор—свойство", хотя существуют и косвенные (скрытые) инциденты множества факторов на себя и (или) множества свойств на себя. Даже при небольшом количестве факторов и свойств учет всевозможных скрытых воздействий без специальных методов затруднителен или вообще невозможен. Авторы предложили для этого эффективные математические модели и методы, основанные на операциях с соответствующими матрицами инцидентов. Элементами матриц могут быть детерминированные или вероятностные оценки, нечеткие числа или доверительные интервалы. Их используют по-разному в зависимости от того, разрешается или не разрешается экспертам согласовывать свои мнения.

Материал, изложенный в книге, можно изучать, не обращаясь к другим источникам. Приведенные примеры иллюстрируют простоту предложенных методов и широчайшие возможности для их применения. Именно по этой причине мы включили книгу в серию "Новые математические модели и методы в управлении", подготавливаемую кафедрой математического обеспечения АСУ Белорусского государственного университета.

С согласия авторов несколько изменено название книги - оригинала — "Методы для исследования забытых воздействий". Этим самым подчеркивается, что неточности экспертных оценок носят не столько субъективный, сколько объективный характер. В то же время мы понимаем, что использованное нами название все-таки достаточно широко, потому что с общей точки зрения любое научное исследование занимается восстановлением скрытых взаимодействий в системах, явлениях, процессах.

Будем признательны читателям за замечания по содержанию выпущенных в серии книг, советы и пожелания по составу серии. Выражаем

благодарность Г.А.Москаленко за качественный перевод-подстрочник с испанского языка на русский настоящей и предыдущей [1] книг серии, а также Б.А.Юхименко за подготовку на компьютере оригиналов-макетов этих книг.

Наш адрес : 220050, Республика Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, кафедра МО АСУ.

*В.В.Краснопрошин,
Н.А.Лепешинский*

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Повсюду и всегда люди совершают ошибки и промахи вследствие забывчивости или небрежности. Даже при наличии самых мощных машин для хранения и обработки информации риск забыть что-либо никогда полностью не исчезнет. Поскольку мы находимся в окружении самых различных технологий, такое забывание может быть опасным, и поэтому необходима разработка методов профилактики через познание всевозможных причинно-следственных связей. Последовательности влияний (инцидентий), цепочек вывода, следствий образуют сеть, в которой не всегда учитываются отдельные пути. Даже при двух или трех ступенях в рассуждениях могут быть пропущены возможные разветвления. Для того чтобы повысить эффективность исследований скрытых воздействий, используются компьютеры, для которых нужны соответствующие математические модели и методы. Данная книга претендует на изложение нескольких пригодных для этого моделей.

Все мы включены в системы и подсистемы разной природы: экономической, образовательной, профсоюзной, технологической. Окружающий нас мир — это ничто иное, как системы и подсистемы. Хотя в некоторых случаях можно составить четкие инструкции для управления (например, взлетом самолета, включением центрального отопления), всегда существует определенный риск небрежности или неблагоразумия, которого следует избежать. Риск не всегда бывает явным (заметным) или непосредственно ощущаемым; иногда он не очевиден и является следствием другого следствия, наслоением причин. Модели и методы, используемые для поиска скрытых воздействий, не совпадают с теми, которые описывают надежность систем. Они располагаются на предшествующем уровне анализа. Такие модели представляют собой графы со взвешенными дугами или вершинами. Весами дуг (вершин) могут быть числа из интервала $[0, 1]$ или доверительные интервалы с границами из $[0, 1]$. Для анализа таких моделей может использоваться булева алгебра, или теория нечетких множеств, или теория "экспертонов". Методы не являются трудными ни для восприятия, ни для программирования. Они эффективны даже при большом объеме данных, когда следует использовать компьютер. Необходимые для изложения

сведения из теории графов элементарны и по мере надобности приведены в книге.

Методы управления и методы исследования скрытых воздействий часто переплетаются и дополняют друг друга. Известный французский инженер и экономист Жан Форастье назвал скрытые воздействия следствиями второго поколения, особенно по отношению к политическим и социально-экономическим решениям, и отметил опасность неучета этих воздействий. Мы также осознаем эту опасность и надеемся, что разработанные нами методы помогут ее уменьшить. Иллюзией было бы считать, что этим самым предупреждается ее забывание. Тем не менее важным является постоянное устранение его причин. Это следует делать регулярно, так как в новых системах появляются новые следствия и цепочки выводов, которые могут быть неучтенными.

Детерминизм неприменим к анализу деятельности человека, предприятий, страны, общества. Механистическое понимание сложных систем уже исчерпало себя. Все вокруг является развивающимся и приспособливающимся. Учет этого оказывается более трудным, но чрезвычайно интересным. Настоящая книга не претендует на исчерпывающее изложение темы, однако может оказаться полезной в наше время, насыщенное информацией. Важность следствий второго, третьего и более высоких порядков заметна во всех сферах и областях принятия решений: в политике, экономике, предпринимательстве, технике, медицине, биологии и т.п. В книге приведены примеры применения предложенных методов. Они разработаны на основе данных, представленных экспериментами в каждой из соответствующих областей. Конечно, мы не настаиваем на полном принятии всех представленных оценок и у читателя может быть свое мнение по поводу их. Здесь следует иметь в виду, что числами оценивались субъективные впечатления и примеры только иллюстрируют возможности методов.

Надеемся, что наши усилия были не напрасными, поскольку они позволили открыть широкий горизонт исследований.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ. МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОНЯТИЕ ИНЦИДЕНЦИИ

1. Введение

Концепция инцидентности ассоциируется с идеей действия совокупности объектов на другую совокупность объектов или на саму себя. Так, хорошая погода имеет инцидентность на продажу летнего платья (благоприятную), на продажу зонтиков (неблагоприятную) и на посещаемость кинотеатров (неблагоприятную). Математически понятие инцидентности может быть связано с общеизвестным понятием функции. Будем пользоваться им, переходя от самой простой (инцидентность существует или не существует) к более сложным интерпретациям, включающим элементы рассуждений.

Понятие инцидентности, которое встречается во всех действиях живых существ, внешне кажется очень простым, но заслуживает краткого научного объяснения. При рассуждениях чаще всего в явном виде его не используют, поскольку оно естественно и как бы автоматически возникает в процессе мышления. На самом же деле при достаточно сложных рассуждениях инцидентности образуют пространственную сеть, в которой опущены многие этапы и не учтены выводы, разделенные более или менее осознанно. Даже в простейшей линейной цепочке выводов часто могут быть пропущены важные взаимодействия, и это приводит к искажению окончательно принимаемых решений. Плохо, если это случается в повседневной жизни, но, к сожалению, это бывает и на верхних уровнях принятия решений.

В наш век информатики и экспертных систем для наилучшего развития в условиях неопределенности необходимо предвидение. Предвидеть — это фактически полнее учитывать всевозможные, даже понимаемые субъективно, инцидентности для аргументации действий и поступков.

Математический аппарат, используемый в рассмотренных ниже моделях, прост, и мы надеемся, что имеющихся в тексте объяснений, комментариев и примеров достаточно для его понимания. Сами модели легко программируются.

2. Инциденции первого порядка

Рассмотрим простой пример. Пусть A - множество объектов :

$$(2.1) \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

которое каким-то образом воздействует (будем говорить, имеет инциденцию) на множество B других объектов :

$$(2.2) \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}.$$

Можно считать, что если инциденция a_i на b_j существует, то значение пары (a_i, b_j) равно 1, и если этой инциденции не существует, то значение пары (a_i, b_j) равно 0. Совокупность значений, оцениваемых таким образом, определяет так называемую матрицу инциденций.

Рассмотрим, например, инциденцию множества A на множество B в виде матрицы

(2.3)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	0	1
a_2	0	0	1	0
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0

Из матрицы видно, например, что $v(a_1, b_3) = 0$, $v(a_1, b_4) = 1$, $v(a_2, b_3) = 1$, $v(a_5, b_3) = 0$ и т.д. Отметим, что элемент a_4 не имеет инциденции ни на один из элементов множества B . Матрица инциденций однозначно задает так называемый граф инциденций - двусторонний граф, вершины которого соответствуют элементам множеств A и B , а ориентированные дуги — единичным элементам матрицы и только им. Для матрицы (2.3) получается граф инциденций, изображенный на рис.2.1.

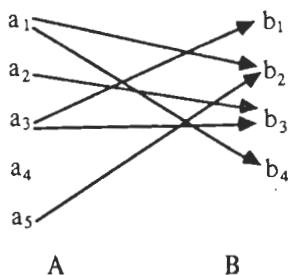


Рис. 2.1

В математике описываемое понятие называется многозначным отображением A в B . Можно использовать другую форму записи инцидентий, в которой указывается, на какие элементы B имеет инциденцию каждый из элементов A :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Gamma\{a_1\} = \{b_2, b_4\}, \\ \Gamma\{a_2\} = \{b_3\}, \\ \Gamma\{a_3\} = \{b_1, b_3\}, \\ \Gamma\{a_4\} = \emptyset, \\ \Gamma\{a_5\} = \{b_2\}. \end{cases}$$

Факт, что a_4 не имеет инциденции ни на один элемент из B , обозначается символом \emptyset - пустым множеством.

Если a_i имеет инциденцию на b_j , то можно говорить, что в свою очередь b_j находится "под влиянием" a_i . Если в матрице инцидентий (2.3) строки сделать столбцами и столбцы строками, то получим матрицу, которую будем называть матрицей влияний. Для нашего примера имеем:

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & & \\ \hline 1 & & & & & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline \end{array} & & & & & \end{array}$$

Достаточно изменить ориентацию всех дуг графа на рис.2.1, чтобы получить граф влияний. Запись инцидентий в форме (2.4) для влияний будет иметь вид:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \Gamma^{-1}\{b_1\} = \{a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_2\} = \{a_1, a_5\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_3\} = \{a_2, a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_4\} = \{a_1\}. \end{cases}$$

Итак, пусть рассматривается конечное множество A объектов

$$(2.7) \quad A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\},$$

имеющее инциденцию на другое конечное множество B объектов

$$(2.8) \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Можно считать, что если инциденция $a_i \in A$ на $b_j \in B$ существует, то значение v пары (a_i, b_j) равно 1, а если этой инциденции не существует, то

значение v пары (a_i, b_j) равно 0. Матрица, образованная значениями всех этих пар, называется матрицей инцидентий, а матрица, образованная значениями пар (b_j, a_i) , — матрицей влияний.

Рассмотрим конкретный пример с оговоркой, что оценка степени инцидентии только значениями 0 или 1 в излагаемой ситуации явно недостаточна. Будем расценивать этот фрагмент только как шаг к реально используемым моделям. Для автомобиля, пользующегося широким спросом, рассматриваются 6 технологических или коммерческих свойств:

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 - \text{мощность,} \\ a_2 - \text{максимальная скорость,} \\ a_3 - \text{тип подвески,} \\ a_4 - \text{потребление горючего,} \\ a_5 - \text{цена,} \\ a_6 - \text{качество тормозной системы,} \end{array} \right.$$

и 5 качеств, ценимых водителями:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 - \text{устойчивость на дороге,} \\ b_2 - \text{безопасность,} \\ b_3 - \text{комфорт,} \\ b_4 - \text{престижность,} \\ b_5 - \text{надежность.} \end{array} \right.$$

Водитель мог бы следующим образом составить матрицу инцидентий перечисленных свойств на качества:

$$(2.11) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & 1 & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline 1 & 1 & & & & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Это, конечно, только одна из возможных оценок водителя. Если в качестве оценок выбирать только 0 и 1, то трудно сформировать матрицу вида (2.11) и тем более ее использовать.

Отметим, что некоторые элементы A могут встретиться в B и наоборот. В некоторых случаях множества A и B совпадают. Тогда в матрице инцидентий элементы главной диагонали будут равны 1, поскольку каждый

объект имеет гипотетически полную инциденцию на самого себя. Рассмотрим пример матрицы инциденций, когда $A=B$. Пусть

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 - \text{климат,} \\ a_2 - \text{сельское хозяйство,} \\ a_3 - \text{здравоохранение,} \\ a_4 - \text{промышленность,} \\ a_5 - \text{образование;} \end{array} \right.$$

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 - \text{климат,} \\ b_2 - \text{сельское хозяйство,} \\ b_3 - \text{здравоохранение,} \\ b_4 - \text{промышленность,} \\ b_5 - \text{образованис.} \end{array} \right.$$

Экономист мог бы оценить следующим образом инциденцию A на B :

$$(2.14) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1^* \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Очевидно, что такие матрицы инциденций являются рефлексивными (главная диагональ образована из 1), но они несимметричны или симметричны в редких случаях. Например, климат имеет инциденцию на сельское хозяйство, но не наоборот. Здесь опять можно заметить трудности при формировании и использовании матриц только из значений 0 и 1.

Когда используется только одна матрица инциденций, говорят, что анализ отражает инциденции первого порядка. Перейдём далее к анализу того, что назовем инциденциями второго порядка.

3. Инциденции второго и более высоких порядков

Рассмотрим инциденцию множества A на множество B и инциденцию множества B на третье множество C . Пусть, например,

$$(3.1) \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \},$$

$$(3.2) \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\},$$

$$(3.3) \quad C = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Получаем инциденции, представленные двумя приведенными ниже матрицами и соответствующими графами инциденций (рис.3.1 и 3.2):

(3.4)

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
a ₁	1			1	
a ₂		1		1	1
a ₃					1
a ₄				1	

(3.5)

	c ₁	c ₂	c ₃
b ₁	1		
b ₂			
b ₃	1	1	
b ₄		1	1
b ₅	1		

В пустых клетках этих матриц подразумеваются нули.

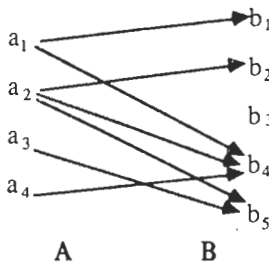


Рис. 3.1

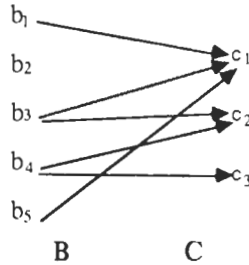


Рис. 3.2

Последовательное применение двух инциденций приводит к инциденции второго порядка (рис.3.3). Это инциденции элементов A на элементы C посредством B.

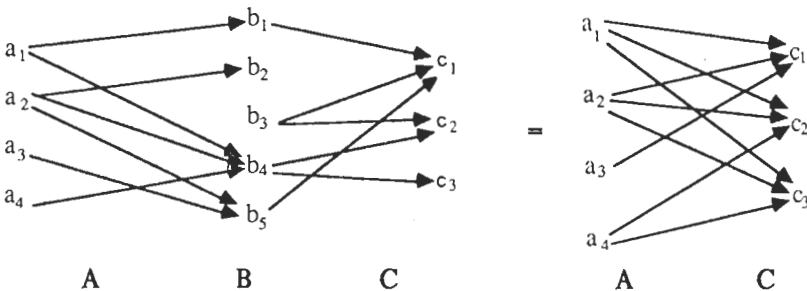


Рис. 3.3

Второму графу (правому) на рис.3.3 соответствует матрица инциденций второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \mu(a_1, c_1) &= (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_1)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_1)) \vee \\
 (3.10) \quad &\vee (\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_1)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_1)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_1)) = \\
 &= (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = \\
 &= 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1,
 \end{aligned}$$

клетки (a_1, c_2)

$$\begin{aligned}
 \mu(a_1, c_2) &= (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_2)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_2)) \vee \\
 (3.11) \quad &\vee (\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_2)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_2)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_2)) = \\
 &= (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = \\
 &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1,
 \end{aligned}$$

клетки (a_3, c_3)

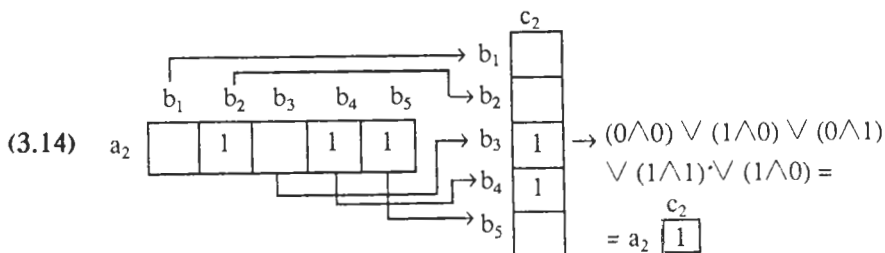
$$\begin{aligned}
 \mu(a_1, c_3) &= (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_3)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_3)) \vee \\
 (3.12) \quad &\vee (\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_3)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_3)) \vee \\
 &\vee (\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_3)) = \\
 &= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = \\
 &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0
 \end{aligned}$$

и так для всех элементов А, В и С. В общем случае, для всех a_i, b_j и c_k , где $i=1,2,3,4; j=1,2,3,4,5; k=1,2,3$, получим

$$(3.13) \quad \mu(a_i, c_k) = \bigvee_j (\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k)),$$

что определяет композицию матриц для инцидентности А на С посредством В, т. е. исходя из инцидентий А на В и В на С.

Наглядно процедуру получения оценок клеток (a_i, c_k) можно представить в следующем виде. Так, если взять строку a_2 из (3.4) и столбец c_3 из (3.5), получаем:



Рассмотрим на простом примере, какую пользу может принести введение инциденции второго порядка.

Предположим, что лицо (или лица), которое должно оценивать элементарные инциденции, представило непосредственные инциденции А на С в виде матрицы

$$(3.15) \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & 1 & & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & i & & \\ a_4 & & 1 & \end{array}$$

С другой стороны, используя инциденции А на В и В на С и операцию композиции шахмiн, можно получить матрицу (3.6). Сравнивая (3.6) и (3.15), видим, что элементы в (3.15) оценены по какой-то причине неправильно. Действительно, пары (a_1, c_2) и (a_4, c_3) имеют значения 0 в (3.15) и 1 в (3.6). Можно сказать, что воздействия (a_1, c_2) и (a_4, c_3) являются скрытыми. Из рис.3.3 видно, что (a_1, c_2) должно было бы приобрести значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_1, b_4) и (b_4, c_2) . Также (a_4, c_2) должно было бы иметь значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_4, b_4) и (b_4, c_2) .

Может также случиться, что, наоборот, одна пара будет иметь значение 1 в (3.15) и 0 в (3.6). В этом случае целесообразно вернуться к анализу (3.15) для повторной оценки воздействий.

На этом примере видно, что степень субъективности оценок инциденций можно проверить, если известно, что они формируются через промежуточные объекты.

Теперь можно обобщить рассматриваемую схему и ввести инциденции третьего, четвертого и последующих порядков. Пусть M_{AB} - матрица инциденций А на В, M_{BC} - матрица инциденций В на С, M_{CD} - матрица инциденций С на D и т. д. Композиция шахмiн, представленная математической формулой (3.13), должна повторяться необходимое число раз.

Для краткости записей обозначим композицию шахмiн символом \circ . Тогда (3.13) будет иметь вид

$$(3.16) \quad M_{AC} = M_{AB} \circ M_{BC}.$$

Для инциденции третьего порядка получим

$$(3.17) \quad M_{AD} = M_{AB} \circ M_{BC} \circ M_{CD}.$$

Легко проверяется, что композиция шахмiн обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(3.18) \quad M_{AB} \circ (M_{BC} \circ M_{CD}) = (M_{AB} \circ M_{BC}) \circ M_{CD},$$

и поэтому порядок применения этой операции в выражениях типа (3.17) не имеет значения.

4. Использование нечетких матриц

В нечетком отношении (или в нечеткой матрице) \underline{M} оценка пары $(x_i, x_j) \in R \subset A \times B$, где A и B - заданные конечные множества или исходные данные, вместо того, чтобы принимать значение 0 или 1 (инциденция или неинциденция), может принять любое значение между 0 и 1, т. е.

$$(4.1) \quad \forall (x_i, x_j) \in \underline{M} \quad v(x_i, x_j) \in [0, 1].$$

Так, если A и B заданы в виде (2.1) и (2.2), то можно представить нечеткое отношение или нечеткое подмножество $A \times B$ в виде

$$(4.2) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & .3 & .7 & 0 & 1 \\ a_2 & .2 & 1 & .4 & 0 \\ a_3 & .9 & 0 & 0 & .3 \\ a_4 & .2 & 0 & .8 & 1 \\ a_5 & 0 & .7 & 0 & .5 \end{array} \end{array}$$

В нашем примере в (4.2) оценки для простоты представлены числами с одним знаком после точки, хотя можно взять любое желаемое количество знаков.

По аналогии с рис.2.1 нечеткие отношения также можно представлять графами, причем на дугах указывать оценки соответствующих пар. Отсутствие дуги означает, что соответствующая инциденция имеет нулевую оценку. Таким образом, нечеткая матрица (4.2) представляется рис.4.1.

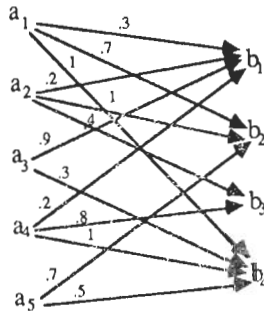


Рис. 4.1

Введение оттеночной оценки между 0 и 1 позволяет установить определенные уровни в понятии инциденции. Например, можно установить

семантическое соответствие для 11 значений от 0 до 1 (так называемая одиннадцатиуровневая инциденция):

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{без инциденции,} \\ 0.1 - \text{практически без инциденции,} \\ 0.2 - \text{почти без инциденции,} \\ 0.3 - \text{очень слабая инциденция,} \\ 0.4 - \text{слабая инциденция,} \\ 0.5 - \text{средняя инциденция,} \\ 0.6 - \text{ощутимая инциденция,} \\ 0.7 - \text{значительная инциденция,} \\ 0.8 - \text{сильная инциденция,} \\ 0.9 - \text{очень сильная инциденция,} \\ 1 - \text{наибольшая инциденция.} \end{array} \right.$$

Однако субъективность понятия инциденции и введенных соответствий может препятствовать их широкому использованию. Возможно, что предпочтительнее окажутся оценки истинности высказывания

P : существует инциденция
и при этом

$$(4.4) \quad v(P) = \left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{выражение ложно,} \\ 0.1 - \text{практически ложно,} \\ 0.2 - \text{почти ложно,} \\ 0.3 - \text{достаточно ложно,} \\ 0.4 - \text{скорее ложно, чем истинно,} \\ 0.5 - \text{ни истинно, ни ложно,} \\ 0.6 - \text{скорее истинно, чем ложно,} \\ 0.7 - \text{достаточно истинно,} \\ 0.8 - \text{почти истинно,} \\ 0.9 - \text{практически истинно,} \\ 1 - \text{истинно.} \end{array} \right.$$

Если оценки уровня инциденции выбираются из интервала $[0, a]$, т. е. оценка $k \in [0, a]$, то

$$(4.5) \quad v(P) = k / a ,$$

и если этот интервал имеет вид $[a_1, a_2]$, то

$$(4.6) \quad v(P) = (k - a_1) / (a_2 - a_1) , \quad k, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+ .$$

В случае необходимости возможно использование более сложных, чем (4.6), формул.

В качестве примера рассмотрим снова матрицу инциденций, касающуюся (2.9) и (2.10), через нечеткие оценки. Водитель мог бы предложить следующую нечеткую матрицу :

(4.7)

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
a ₁	.2	.7	.4	1	0
a ₂	0	.2	.5	1	.6
a ₃	1	1	1	0	.4
a ₄	0	0	.4	0	.2
a ₅	.6	.8	.7	1	.6
a ₆	1	1	.3	0	.8

Для примера (2.12) и (2.13) экономист мог бы дать следующие оценки:

(4.8)

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
a ₁	1	.9	.8	.1	.1
a ₂	.1	1	.8	.3	.1
a ₃	0	.1	1	.1	.4
a ₄	.3	.2	.1	1	0
a ₅	0	.3	.8	.8	1

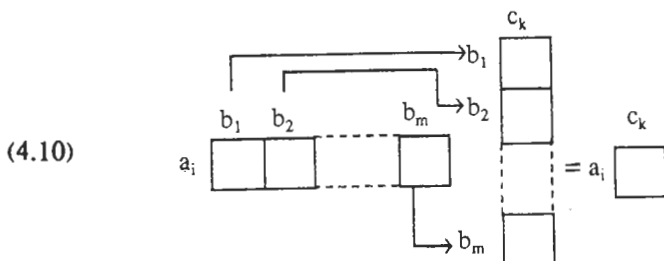
В дальнейшем мы увидим преимущества использования нечетких оценок над двоичными, хотя уже можно догадаться, что введение оттеночности позволяет добиться более точного выражения мысли.

Перейдем сейчас к рассмотрению нечетких матриц инцидентий второго и более высоких порядков. Для этого еще раз воспользуемся композицией \max , задаваемой формулой (3.13), с заменой оценок μ на оценки v в всех инцидентиях.

Таким образом, для всех a_i, b_j и c_k

$$(4.9) \quad v(a_i, c_k) = \bigvee_j (v(a_i, b_j) \wedge v(b_j, c_k)).$$

Как и в (3.14), можно использовать схему этой композиции:



Пусть даны три множества:

$$(4.11) A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$$(4.12) B = \{b_1, b_2, b_3\},$$

$$(4.13) C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$$

и нечеткие матрицы инцидентий A на B и B на C:

$$(4.14) \quad \underline{M}_{AB} =$$

	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	.3	0	.8
a ₂	1	0	.6
a ₃	.5	.5	.7
a ₄	.3	0	.8

$$(4.15) \quad \underline{M}_{BC} =$$

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
b ₁	.9	1	1	.4	0
b ₂	.2	.5	.5	.3	.9
b ₃	.8	.6	.1	.2	0

Композиция тахтіп вычисляется следующим образом:

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(a_1, c_1) = (v(a_1, b_1) \wedge v(b_1, c_1)) \vee \\ \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_1)) \vee \\ \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_1)) = \\ = (0.3 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) = 0.8, \\ v(a_1, c_2) = (v(a_1, b_1) \wedge v(b_1, c_2)) \vee \\ \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_2)) \vee \\ \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_2)) = \\ = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.6) = 0.6, \\ v(a_1, c_3) = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.1) = 0.3, \\ v(a_1, c_4) = (0.3 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.2) = 0.3, \\ v(a_1, c_5) = (0.3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0) = 0, \\ v(a_2, c_1) = (1 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) = 0.9, \\ v(a_2, c_2) = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.6) = 1, \end{array} \right.$$

т. е. получаем

$$(4.17) \quad \underline{M}_{AB} \circ \underline{M}_{BC} = \underline{M}_{AC}$$

или конкретно

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 a_1 & .3 & 0 & .8 \\
 a_2 & 1 & 0 & .6 \\
 a_3 & .5 & .5 & .7 \\
 a_4 & .3 & 0 & .8
 \end{array}
 & \circ &
 \begin{array}{ccccc}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
 b_1 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\
 b_2 & .2 & .5 & .5 & .3 & .9 \\
 b_3 & .8 & .6 & .1 & .2 & 0
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccccc}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
 a_1 & .8 & .6 & .3 & .3 & 0 \\
 a_2 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\
 a_3 & .7 & .6 & .5 & .4 & .5 \\
 a_4 & .8 & .6 & .3 & .3 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Если \underline{M}_{AB} имеет l строк и m столбцов, а \underline{M}_{BC} — m строк и p столбцов, то \underline{M}_{AC} должна иметь l строк и p столбцов. В противном случае композиция была бы невозможна.

Отметим сейчас два свойства матриц инцидентий (нечетких или двоичных). Если даны три матрицы инцидентий $\underline{A}_{l \times m}$, $\underline{B}_{m \times n}$, $\underline{C}_{n \times r}$, то выполняется

$$(4.18) \quad \underline{A}_{l \times m} \circ \underline{B}_{m \times n} = \underline{B}_{m \times n} \circ \underline{A}_{l \times m},$$

причем сравнение композиций может проводиться лишь в том случае, если $l=m=n$, и только в частных случаях может выполняться равенство. В любом случае также выполняются свойства ассоциативности

$$(4.19) \quad \underline{A}_{l \times m} \circ (\underline{B}_{m \times n} \circ \underline{C}_{n \times r}) = (\underline{A}_{l \times m} \circ \underline{B}_{m \times n}) \circ \underline{C}_{n \times r}.$$

Ниже рассмотрим и другие свойства.

Представим сейчас композицию (4.17) в форме графов (рис. 4.2).

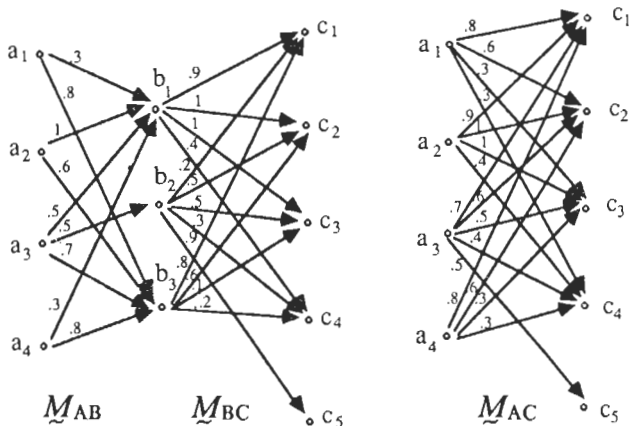


Рис. 4.2

До рассмотрения других свойств матриц инцидентий разберем далее практический пример с тем, чтобы читатель смог увидеть полезность введенных понятий.

5. Пример исследования скрытых воздействий с помощью матриц инцидентий

Пример взят из работ [2], [3], посвященных методам моделирования и методам принятия управленческих решений в условиях неопределенности. Советуем читателям, заинтересованным в исследовании скрытых воздействий, обратить внимание на методы моделирования и исследования операций как из-за многочисленных аналогий между различными моделями, так и из-за многих однотипных действий при использовании компьютеров для обработки данных. Рассматриваемый пример является расширением в область нечеткости трехзначной (с тремя уровнями оценки) матрицы инцидентий, введенной Николасом Валери, издателем и директором журнала "New Scientist" (Великобритания). Это расширение поможет нам пояснить, как применяются матрицы инцидентий для исследования скрытых воздействий или следствий второго порядка. В этом случае группой экспертов после предварительных обсуждений устанавливаются оценки экономических или социальных взаимосвязей. Конечно, мы не будем считать, что это окончательные оценки, имея в виду чисто учебную цель примера. Рассмотрим 12 секторов, определяющих жизнедеятельность людей: 1) климат; 2) население; 3) сельское хозяйство; 4) здравоохранение; 5) образование; 6) наука и техника; 7) промышленность; 8) энергетика; 9) окружающая среда; 10) транспорт; 11) связь; 12) оборона.

Построим квадратную матрицу 12×12 , строки и столбцы которой соответствуют введенным секторам, а элементы представляют оценки

экспертов. Поскольку матрица рефлексивна и на ее главной диагонали будут стоять единицы, то необходимо установить 132 оценки (12×12-12).

Т а б л и ц а 5.1

$\underline{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.2	.9	.8	.1	.5	.1	.5	.8	.2	.3	.6
2	0	1	.3	.9	.8	.6	.5	.7	.6	.8	.5	1
3	.1	.4	1	.8	.1	.1	.3	.2	1	.2	0	.1
4	0	.6	.1	1	.4	.2	.1	.1	.2	0	0	.4
5	0	1	.3	.8	1	1	.8	.3	.5	.2	.2	.4
6	.2	.3	.4	.6	.5	1	1	1	.8	1	1	1
7	.3	.2	.2	.1	0	.3	1	.2	.8	.4	.3	.8
8	.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6
9	.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0
10	.1	.8	.2	.3	0	0	.8	.6	.2	1	.2	.4
11	0	.3	0	.1	0	.2	.3	.2	.3	.3	1	.3
12	0	.8	.1	0	.1	1	.6	.5	0	.2	.1	1

В табл. 5.1 приведены инцидентии, оцененные экспертами. Так, климат (строка 1) имеет инцидентию, оцениваемую в 0.8 на здравоохранение. Это важный фактор для здравоохранения (строка 4), но он не единственный. Образование (строка 5) имеет инцидентию, оцениваемую в 1 на население (столбец 2): для ближайшего будущего образование оказывается существенным для населения и т.д.

Таким образом, группа экспертов дала свои оценки для прямых непосредственных воздействий. Попытаемся обнаружить воздействия второго порядка с помощью следующих расчетов:

$$(5.1) \quad \underline{M}_{(2)} = \underline{M}_{(1)} \circ \underline{M}_{(1)}.$$

Легко доказать, что если матрица \underline{M} является рефлексивной (т.е. ее главная диагональ состоит из единиц), элементы матрицы будут не меньше, чем соответствующие элементы матрицы $\underline{M} \circ \underline{M}$, т.е.

$$(5.2) \quad \underline{M} \in \underline{M} \circ \underline{M}.$$

Как будет показано ниже, это важно, поскольку можно будет использовать разность

$$(5.3) \quad \underline{M} \circ \underline{M} - \underline{M}$$

для исключения воздействий первого порядка из воздействий второго порядка, задаваемых матрицей $\underline{M} \circ \underline{M}$. Сначала вычислим

$$(5.4) \quad \underline{M}_{(2)} = \underline{M}_{(1)} \circ \underline{M}_{(1)}.$$

Это приводит к матрице, представленной табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

$\underline{M}_{(2)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.8	.9	.8	.5	.6	.6	.5	.9	.5	.5	.6
2	.3	1	.4	.9	.8	1	.8	.7	.7	.8	.6	1
3	.3	1	1	1	.4	.4	.5	.4	1	.4	.4	.4
4	.2	.6	.3	1	.6	.6	.5	.6	.6	.6	.5	.6
5	.3	1	.4	.9	1	1	1	1	.8	1	1	1
6	.3	.8	.4	.8	.5	1	1	1	.9	1	1	1
7	.3	.8	.3	.8	.3	.8	1	.5	.8	.4	.3	.8
8	.3	.9	.3	.9	.3	.6	1	1	.9	1	.3	.8
9	.3	1	.3	1	.8	.6	.5	.7	1	.8	.5	1
10	.3	.8	.3	.8	.8	.6	.8	.7	.8	1	.5	.8
11	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	1	.3
12	.3	.8	.4	.8	.8	1	1	1	.8	1	1	1

Вычислим далее

$$(5.5) \quad \underline{M}'_{(2)} = \underline{M}_{(2)} - \underline{M}_{(1)}$$

с целью выявления воздействий второго порядка. Получим матрицу, представленную табл. 5.3.

Сравнение элементов приведенных матриц (см. табл. 5.1 — 5.3) позволяет установить скрытые воздействия (инцидентии второго порядка). Выпишем наиболее значимые из них:

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (9 \rightarrow 12) \text{ окружающая среда - оборона,} \\ (8 \rightarrow 2) \text{ энергетика - население,} \\ (8 \rightarrow 4) \text{ энергетика - здравоохранение,} \\ (12 \rightarrow 11) \text{ оборона - связь,} \\ (5 \rightarrow 10) \text{ образование - транспорт,} \\ (5 \rightarrow 11) \text{ образование - связь,} \\ (10 \rightarrow 5) \text{ транспорт - образование,} \\ (12 \rightarrow 4) \text{ оборона - здравоохранение,} \\ (12 \rightarrow 9) \text{ оборона - окружающая среда,} \\ (12 \rightarrow 10) \text{ оборона - транспорт.} \end{array} \right.$$

Т а б л и ц а 5.3

$\underline{M}_{(2)} - \underline{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.6	0	0	.4	.1	.5	0	.1	.3	.2	0
2	.3	0	.1	0	0	.4	.3	0	.1	0	.1	0
3	.2	.6	0	.2	.3	.3	.2	.2	0	.2	.4	.3
4	.2	0	.2	0	.2	.4	.4	.5	.4	.6	.5	.2
5	.3	0	.1	.1	0	0	.2	.7	.3	.8	.8	.6
6	.1	.5	0	.2	0	0	0	0	.1	0	0	0
7	0	.6	.1	.7	.3	.5	0	.3	0	0	0	0
8	.1	.9	.2	.9	.3	.4	0	0	0	0	.3	.2
9	.1	0	0	0	.5	.3	0	.7	0	.5	.4	1
10	.2	0	.1	.5	.8	.6	0	.1	.6	0	.3	.4
11	.3	0	.3	.2	.3	.1	0	.1	0	0	0	0
12	.3	0	.3	.8	.7	0	.4	.5	.8	.8	.9	0

Восстановим теперь промежуточные инциденции, с помощью которых можно обнаружить скрытые воздействия. Для этого используем (табл.5.1) и определим наибольший из минимумов между каждым элементом строки входа и соответствующим элементом выхода. Получим:

$$(5.7) \quad (9 \rightarrow 12): \quad 9 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 12 \quad 1$$

вместо $9 \xrightarrow{0} 12 \quad 0 \quad 1 - 0 = 1$

$$(5.8) \quad (8 \rightarrow 2): \quad 8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 2 \quad 0.9$$

вместо $8 \xrightarrow{0} 2 \quad 0 \quad 0.9 - 0 = 0.9$

$$(5.9) \quad (8 \rightarrow 4): \quad 8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 4 \quad 0.9$$

вместо $8 \xrightarrow{0} 4 \quad 0 \quad 0.9 - 0 = 0.9$

$$(5.10) \quad (12 \rightarrow 11): \quad 12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \quad 1$$

вместо $12 \xrightarrow{0.1} 11 \quad 0.1 \quad 1 - 0.1 = 0.9$

$$(5.11) \quad (5 \rightarrow 10): \quad 5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10 \quad 1$$

вместо $5 \xrightarrow{0.2} 10 \quad 0.2 \quad 1 - 0.2 = 0.8$

$$(5.12) \quad (5 \rightarrow 11): \quad 5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \quad 1$$

вместо $5 \xrightarrow{0.2} 11 \quad 0.2 \quad 1 - 0.2 = 0.8$

(5.13)	(10 \rightarrow 5) :	$10 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.8} 5$ $10 \xrightarrow{0} 5$	0.8 0	0.8 - 0 = 0.8
вместо				
(5.14)	(12 \rightarrow 10) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10$ $12 \xrightarrow{0.2} 10$	1 0.2	1 - 0.2 = 0.8
вместо				
(5.15)	(12 \rightarrow 9) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{0.8} 9$ $12 \xrightarrow{0} 9$	0.8 0	0.8 - 0 = 0.8
вместо				
(5.16)	(12 \rightarrow 4) :	$12 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.9} 4$ $12 \xrightarrow{0} 4$	0.8 0	0.8 - 0 = 0.8.
вместо				

Попытаемся интерпретировать некоторые из этих результатов. Например, непосредственно окружающая среда (строка 9) не оказывает никакого влияния на оборону (столбец 12), но проявляется вторичное воздействие через население (строка 2): лучше защищается собственная страна, чем иностранная территория. Оборона главным образом занимается защитой собственного населения. Подобным же образом энергетика (строка 8) не оказывает непосредственного влияния на население (столбец 2), но существует важное вторичное воздействие через окружающую среду (строка 9), т. е. очень активный вторичный эффект загрязнения не принимался во внимание.

Оставим читателю анализ и объяснение остальных перечисленных выше вторичных воздействий ((5.9) - (5.16)). Кроме того, можно изучить вторичные воздействия со значениями отклонений, меньших 0.8.

Конечно, детальные исследования должны были бы включать значительно большее количество секторов (параметров). Интуитивно ясно, что чем большее число параметров рассматривается (т. е. чем выше размерность матрицы $\underline{M}_{(1)}$), тем больше возможностей существует для выявления значительного числа скрытых воздействий. Сразу же возникает необходимость использования компьютера.

В определенных случаях могут изучаться воздействия третьего порядка. С этой целью вычисляется разность $\underline{M}_{(3)} - \underline{M}_{(2)}$ для исключения воздействий второго порядка из воздействий второго и третьего порядков. Здесь появляется еще больше вариантов при анализе возможных косвенных воздействий.

6. Второй пример (с прямоугольной матрицей)

Прежде всего напомним одно из свойств прямоугольных матриц. Известно, что единичная матрица - это матрица размерности $n \times n$, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны

нулю. Обозначим эту матрицу через $U_{n \times n}$. Если $\underline{M}_{m \times n}$ - нечеткая матрица, то имеем

$$(6.1) \quad \underline{M}_{m \times n} \circ U_{n \times n} = \underline{M}_{m \times n}$$

или

$$(6.2) \quad U_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} = \underline{M}_{m \times n}.$$

Пусть $\underline{B}_{n \times n}$ - рефлексивная нечеткая матрица. Если вычислить $\underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}$, то всегда

$$(6.3) \quad \underline{M}_{m \times n} \subset \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n},$$

так как $\underline{B}_{n \times n} \supset U_{n \times n}$.

Аналогично если $\underline{A}_{m \times m}$ - рефлексивная нечеткая матрица, то для матрицы $\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}$ получим:

$$(6.4) \quad \underline{M}_{m \times n} \subset \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}.$$

Объединяя (6.3) и (6.4), можно записать:

$$(6.5) \quad \underline{M}_{m \times n} \subset \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}.$$

Если ввести $\underline{M}'_{m \times n} = \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}$, то получим

$$(6.6) \quad \underline{M}_{m \times n} \subset \underline{M}'_{m \times n}.$$

Если \underline{M} - матрица инцидентий элементов А на элементы В, т.е.

$$(6.7) \quad \underline{M} \subset A \times B,$$

то, определив воздействия второго порядка, получим

$$(6.8) \quad \underline{A} \subset A \times A$$

и

$$(6.9) \quad \underline{B} \subset B \times B,$$

где \underline{A} представляет собой инцидентии элементов А на А и \underline{B} — инцидентии элементов В на В. Матрицей, которая задает воздействия первого и второго порядков, является

$$(6.10) \quad \underline{M}^* = \underline{A} \circ \underline{M} \circ \underline{B},$$

и скрытые воздействия будут получены после вычисления

$$(6.11) \quad \underline{D} = \underline{M}^* - \underline{M}.$$

Рассмотрим простой числовой пример. Пусть

$$(6.12) \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

и

$$(6.13) \quad B = \{b_1, b_2, b_3\}.$$

На первой стадии эксперты определяют элементы матрицы

$$(6.14) \quad \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ a_2 & 0 & .3 & .4 \\ a_3 & .9 & .2 & 0 \\ a_4 & .6 & .7 & 0 \end{array}$$

Затем экспертов просят, чтобы они оценили инцидентии элементов А на А и инцидентии элементов В на В. В результате получим матрицы:

$$(6.15) \quad \underline{A} = \begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$(6.16) \quad \underline{B} = \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

По формуле (6.10) вычислим

$$(6.17) \quad \underline{M}^* = \begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \circ \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \circ$$

$$\circ \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

и далее

$$(6.18) \quad \underline{D} = \underline{M}^* - \underline{M} =$$

$$= \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline \end{array} \end{array} - \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & 0 & 0 & (.7) \\ \hline a_2 & (.9) & .4 & .3 \\ \hline a_3 & 0 & .5 & (.7) \\ \hline a_4 & .1 & 0 & (.7) \\ \hline \end{array} \end{array}$$

В матрице D проявляются воздействия второго порядка для (a_1, b_3) , (a_2, b_1) , (a_3, b_3) , (a_4, b_3) .

Сейчас уместно сделать несколько замечаний.

Если требуется установить только инцидентии элементов В на В, достаточно вычислить

$$(6.19) \quad \underline{M}' = \underline{M} \circ \underline{B}.$$

Если же интересны только инцидентии элементов А на А, достаточно вычислить

$$(6.20) \quad \underline{M}'' = \underline{A} \circ \underline{M}.$$

В действительности \underline{M}' выражает совместные воздействия от \underline{A} и \underline{B} ; эти вторичные эффекты будем называть сопряженными воздействиями.

В частном случае, когда $A = B$ и \underline{A} - квадратная рефлексивная матрица, получаем:

$$(6.21) \quad \underline{M}' = \underline{A} \circ \underline{A} = \underline{A}^2,$$

$$(6.22) \quad \underline{M}'' = \underline{A} \circ \underline{A} = \underline{A}^2.$$

Сопряженные воздействия должны применяться только один раз, поскольку далее уже будет вычисляться A^3 .

7. Использование Ф-нечетких матриц

Элементы Ф-нечеткой матрицы инцидентий оцениваются через доверительные интервалы $[a_1, a_2] \subseteq [0, 1]$. Например, при исходных множествах А и В, задаваемых элементами из (2.1) и (2.2), Ф-нечеткая матрица $A \times B$ может иметь вид

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	[.3, .5]	.7	[0, .4]	1
a ₂	0	[.8, 1]	.3	[.2, .5]
a ₃	[.1, .2]	[.8, 1]	[.4, .5]	1
a ₄	1	[0, 1]	[.3, .6]	.2
a ₅	.7	.8	[.4, .6]	.5

где оценка а в виде числа понимается как интервал [а, а].

Операции min (Λ) и max (V), используемые для нечетких значений, вводятся и для доверительных интервалов $[a_1, a_2] \subseteq [0, 1]$ так, что

$$(7.2) \quad [m_1, m_2] (\Lambda) [n_1, n_2] = [m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2],$$

$$(7.3) \quad [m_1, m_2] (V) [n_1, n_2] = [m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2].$$

Ниже мы введем также другие операции.

Преимущество Ф-нечеткого отношения по сравнению с нечетким отношением состоит в том, что для эксперта расширяется поле субъективности. При оценках экспертов может использоваться одиннадцатилурневая система, задаваемая уровнями (4.3) или (4.4). Так, в случае использования (4.3) интервал

$$(7.4) \quad [.2, .4] = [\text{почти без инцидентии, слабая инцидентии}].$$

Итак, при оценках элементов Ф-нечеткой матрицы в виде доверительных интервалов можно записать вместо (4.1)

$$(7.5) \quad \forall x_i, x_j \in M \quad v(x_i, x_j) \in [0, 1].$$

Отметим, что Φ -нечеткие матрицы помечаются специальной тильдой \sim вместо тильды \sim , используемой для нечетких матриц.

Все, что делалось для нечетких матриц, можно перенести на случай Φ -нечетких матриц. Однако надо иметь в виду, что при нечеткости все оценки сравнимы между собой и образуют полный линейный порядок, потому что для любых нечетких оценок m и n

$$(7.6) \quad \text{или } m > n, \text{ или } m = n, \text{ или } m < n.$$

На любом множестве доверительных интервалов можно установить частичный порядок, потому что не все интервалы сравнимы между собой.

Интервалы $[m_1, m_2]$ и $[n_1, n_2]$ сравнимы, т. е. $[m_1, m_2] \leq [n_1, n_2]$, если

$$(7.7) \quad \text{или } (m_1 < n_1, m_2 < n_2), \text{ или } (m_1 < n_1, m_2 = n_2), \text{ или } (m_1 = n_1, m_2 < n_2).$$

Поэтому

$$(7.8) \quad [0.3, 0.7] \text{ несравним с } [0.2, 0.8].$$

Когда два доверительных интервала не сравнимы по правилам (7.7), можно ввести какой-либо другой критерий, основываясь на среднем из концов интервала. Выбор критерия зависит от поставленной задачи. Если Φ -нечеткая матрица такова, что

$$(7.9) \quad \underline{M} \subseteq E \times E,$$

т. е. определяется через отношение исходного множества E на себя, то всегда

$$(7.10) \quad \forall x_i \in E \quad v(x_i, x_i) = 1.$$

Формула (4.9) композиции $\max\min$ превращается в

$$(7.11) \quad v(a_i, c_k) = (\bigvee_j) (v(a_i, b_j) (\wedge) v(b_j, c_k)),$$

где знаки \wedge и \bigvee в скобках указывают на то, что применяются операции (7.2) и (7.3). Композиция $\max\min$, определенная в (7.11), обладает интересным свойством, необходимым для доверительных интервалов: операции (\wedge) и (\bigvee) являются монотонными, т. е.

$$(7.12) \quad [m_1, m_2] (\wedge) [n_1, n_2] \begin{cases} \leq [m_1, m_2], \\ \leq [n_1, n_2], \end{cases}$$

$$(7.13) \quad [m_1, m_2] (\bigvee) [n_1, n_2] \begin{cases} \geq [m_1, m_2], \\ \geq [n_1, n_2]. \end{cases}$$

Кроме того, для любой Φ -нечеткой матрицы инцидентий, главная диагональ которой образована единицами, имеем:

$$(7.14) \quad \underline{M} \subseteq \underline{M}^2, \quad \underline{M}^2 = \underline{M} \circ \underline{M};$$

это означает, что доверительные интервалы \underline{M}^2 ближе к единице, чем интервалы, соответствующие матрице \underline{M} , или совпадают с ней. Речь идет о включении интервалов на основании свойства монотонности. Это же выполняется и для прямоугольных матриц, определенных в § 6:

$$(7.15) \quad \underline{M} \subseteq \underline{M}'.$$

Поясним изложенное несколькими примерами. Пусть

$$(7.16) \quad E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

и матрица инцидентий имеет вид

$$(7.17) \quad \underline{M} = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & [.3, .5] & .7 & [.2, .3] \\ a_2 & 0 & 1 & [.4, .7] & .5 \\ a_3 & [.8, 1] & [.7, 1] & 1 & [.4, .7] \\ a_4 & .2 & [0, .2] & [.1, .4] & 1 \end{array}$$

По формуле (7.11) вычислим \underline{M}^2 . Так, при использовании первой строки и первого столбца матрицы \underline{M} получим:

$$(7.18) \quad ([1, 1] \wedge [1, 1] \vee ([0.3, 0.5] \wedge [0, 0] \vee ([0.7, 0.7] \wedge [0.8, 1] \vee ([0.2, 0.3] \wedge [0.2, 0.2]) = [1, 1] \vee [0, 0] \vee [0.7, 0.7] \vee [0.2, 0.2]) = [1, 1];$$

при использовании первой строки и второго столбца :

$$(7.19) \quad ([1, 1] \wedge [0.3, 0.5] \vee ([0.3, 0.5] \wedge [1, 1] \vee ([0.7, 0.7] \wedge [0.7, 1] \vee ([0.2, 0.3] \wedge [0, 0.2]) = [0.3, 0.5] \vee [0.3, 0.5] \vee [0.7, 0.7] \vee [0, 0.2]) = [0.7, 0.7];$$

при использовании первой строки и третьего столбца :

$$(7.20) \quad ([1, 1] \wedge [0.7, 0.7] \vee ([0.3, 0.5] \wedge [0.4, 0.7] \vee ([0.7, 0.7] \wedge [1, 1] \vee ([0.2, 0.3] \wedge [0.1, 0.4]) = [0.7, 0.7] \vee [0.3, 0.5] \vee [0.7, 0.7] \vee [0.1, 0.3]) = [0.7, 0.7] = 0.7$$

и т.д. В итоге имеем

$$(7.21) \quad \underline{M}^2 = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & .7 & .7 & [.4, .7] \\ a_2 & [.4, .7] & 1 & [.4, .7] & [.5, .7] \\ a_3 & [.8, 1] & [.7, 1] & 1 & [.5, .7] \\ a_4 & [.2, .4] & [.2, .4] & [.2, .4] & 1 \end{array}$$

Сравнивая \underline{M} и \underline{M}^2 , убеждаемся, что

$$(7.22) \quad \underline{M} \subset_{\Phi} \underline{M}^2.$$

Сейчас можно рассчитать расстояние между каждым элементом из \underline{M} и соответствующим ему элементом из \underline{M}^2 . Это расстояние вычислим как среднее отклонений между левыми и правыми концами интервалов. Так, для элемента (a_1, a_2)

$$(7.23) \quad d = ((0.7 - 0.3) + (0.7 - 0.5)) / 2 = 0.3.$$

В итоге получим своеобразную матрицу расстояний

$$(7.24) \quad d_{\underline{M}\underline{M}^2} = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 0 & .3 & 0 & .3 \\ a_2 & .55 & 0 & 0 & .1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & .05 \\ a_4 & .1 & .2 & .05 & 0 \end{array}$$

Из этой матрицы видно, что воздействием a_1 на a_2 нельзя пренебречь.

Рассмотрим далее пример с прямоугольной матрицей. Пусть A и B определены по (6.12), (6.13). Рассмотрим Ф-нечеткую матрицу

$$(7.25) \quad \underset{\sim}{M} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & [.2, .5] & 0 & [.8, 1] \\ \hline a_2 & [.4, .5] & .7 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & [.3, .9] & [0, .2] \\ \hline a_4 & .5 & [.4, .6] & .8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

при

$$(7.26) \quad \underset{\sim}{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & 1 & [0, .3] & [.8, 1] & 1 \\ \hline a_2 & [.4, .5] & 1 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & [.2, .5] & 1 & 1 & [.8, 1] \\ \hline a_4 & [.3, .4] & .5 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$(7.27) \quad \underset{\sim}{B} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & 1 & [.2, .3] & .8 \\ \hline b_2 & 0 & 1 & [.4, .7] \\ \hline b_3 & [.3, .8] & .6 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Вычислим

$$(7.28) \quad \underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}.$$

Получим

$$(7.29) \quad \underset{\sim}{M}^* = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & [.5, .8] & [.6, .9] & [.8, 1] \\ \hline a_2 & [.5, .8] & .7 & 1 \\ \hline a_3 & [.5, .8] & [.7, .9] & 1 \\ \hline a_4 & [.5, .8] & [.6, .9] & [.8, 1] \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Для сравнения (7.25) и (7.29) найдем матрицу расстояний

$$(7.30) \quad \underset{\sim}{d}_{MM^*} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & .3 & .75 & 0 \\ \hline a_2 & .2 & 0 & 0 \\ \hline a_3 & .65 & .2 & .9 \\ \hline a_4 & .15 & .25 & .1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Существует несколько интересных скрытых воздействий, таких как a_3 на b_3 при $d=0.90$, a_1 на b_2 при $d=0.75$, a_3 на b_1 при $d=0.65$. Остальными воздействиями при ненулевых расстояниях можно пренебречь.

8. Использование доверительных троек

Доверительная тройка определяется как разновидность интервальной оценки вида

$$(8.1) \quad (m_1, m_2, m_3), \quad m_1, m_2, m_3 \in [0, 1], \quad m_1 < m_2 < m_3,$$

где m_1 - наименьшее значение; m_2 - максимально предполагаемое значение; m_3 - наибольшее значение.

Введение троек дает возможность большей свободы эксперту (или экспертам), который тремя значениями может точнее проверить свои предположения. Для троек определяются операции (\wedge) и (\vee):

$$(8.2) \quad (m_1, m_2, m_3) (\wedge) (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3),$$

$$(8.3) \quad (m_1, m_2, m_3) (\vee) (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3).$$

Ниже приведен пример матрицы инцидентий, оцениваемой доверительными тройками:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3,.5,.6)	(.1,.2,.3)	(.8,.9,1)	0
a_2	(.2,.2,.7)	(.7,.8,1)	0	1
a_3	.3	1	(.5,.5,.7)	.6
a_4	1	(0,.1,.1)	(.4,.5,.8)	(.9,.9,1)
a_5	(0,.2,.5)	0	(0,0,.2)	(.4,.6,.7)

с учетом того, что

$$(8.5) \quad (m, m, m) = m.$$

Расстояние между двумя доверительными тройками

$$(8.6) \quad (m_1, m_2, m_3) \text{ и } (n_1, n_2, n_3)$$

определяется по формуле

$$(8.7) \quad d(m, n) = ((m_1 - n_1) + 2(m_2 - n_2) + (m_3 - n_3)) / 4,$$

где предполагается, что $m_1 \geq n_1, m_2 \geq n_2, m_3 \geq n_3$. В противном случае в (8.7) необходимо брать абсолютные значения разностей. В формуле (8.7) вес 2 придается максимальному предполагаемому значению. Для упражнения можно использовать примеры от (7.25) до (7.30), помещая в довери-

* Такое взвешивание оправдано, когда проводится аналогия с теорией треугольных нечетких чисел. Формула (8.7) даст в абсолютных значениях расстояние между двумя нечеткими треугольными числами.

тельные интервалы какие-либо максимально предполагаемые значения. Так же, как и для доверительных интервалов, априори можно сказать, что доверительные тройки образуют не полный, а частичный порядок. Когда тройки несравнимы, берется какой-либо другой критерий, например сравниваются их максимально предполагаемые значения.

9. Использование случайных нечетких матриц

При обработке мнений экспертов об инцидентях элементов одного множества на элементы другого множества можно прийти к случайной нечеткой матрице. Пусть имеется 10 экспертов, которым требуется оценить по одиннадцатипоровневой шкале (значениями 0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1) инцидентии элементов множества А

$$(9.1) \quad A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

на элементы множества В

$$(9.2) \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}.$$

Каждый эксперт дает свою матрицу инцидентии :

$$\underline{M}^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .3 & .5 & .9 & 0 \\ a_2 & .6 & .3 & 1 & .2 \\ a_3 & 1 & 0 & .5 & 0 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .7 & 1 & .1 \\ a_2 & .5 & .4 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & .5 & .3 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & .3 & .8 & .2 \\ a_2 & .1 & .5 & 1 & .2 \\ a_3 & .9 & 0 & .7 & .3 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(4)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & .3 & 1 & .2 \\ a_3 & .7 & .2 & .8 & .2 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(5)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & .8 & 1 & .1 \\ a_2 & .4 & .1 & 1 & .1 \\ a_3 & 1 & .3 & .9 & 0 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(6)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .8 & .9 & 0 \\ a_2 & .8 & .2 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & .3 & 0 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(7)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .6 & .4 & 1 & 0 \\ a_2 & .5 & .3 & 1 & .1 \\ a_3 & 1 & 0 & .2 & .2 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(8)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .8 & .2 & 1 & .2 \\ a_2 & .6 & .4 & 1 & .2 \\ a_3 & 1 & 0 & .4 & .1 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(9)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .9 & .5 & .8 & .3 \\ a_2 & .2 & .7 & 1 & 0 \\ a_3 & .4 & .5 & .9 & .2 \end{array}$$

$$\underline{M}^{(10)} = \begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 0 & .5 & .7 & 0 \\ a_2 & 0 & .8 & 1 & .3 \\ a_3 & .8 & .8 & 1 & 0 \end{array}$$

Исходя из этой информации, устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α для каждой пары (a_i, b_j) , где $i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$. Для нашего примера эти данные приведены в табл. 9.1. Эта статистика в расчете на количество экспертов задает частоту встречаемости каждого уровня для каждой пары, и эту частоту можно считать элементарной вероятностью свершения случайного события α , $\alpha \in \{0,0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$. Далее по элементарным вероятностям строится так называемая накопленная вероятность, т. е. для каждой пары (a_i, b_j) , где $i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$, последовательно суммируются значения вероятностей $p(\alpha=1)$, $p(\alpha=0.9)$, ..., $p(\alpha=0.1)$, $p(\alpha=0)$. Получается табл. 9.2. Для каждого уровня α из этой таблицы можно выписать случайную нечеткую матрицу инцидентий элементов множества А на элементы множества В. Все операции, которые осуществлялись ранее с нечеткими отношениями, могут осуществляться со случайными нечеткими отношениями для каждого уровня α , $\alpha \in \{0,0.1,0.2, \dots, 0.9, 1\}$. Понятно, что количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений. Всегда можно взять такое количество экспертов и уровней, которое будет сочтено целесообразным.

Т а б л и ц а 9.1

	b_1	b_2	b_3	b_4
0	1	1		5
.1				2
.2	2	1		2
.3	1	1		1
.4		1		
.5	2	3		
.6	1			
.7		1	1	
.8	1	2	2	
.9	1		2	
1	1		5	
0	2			3
.1	1	1		2
.2	1	1		4
.3		3		1
.4	1	2		
.5	2	1		
.6	2			
.7		1		
.8	1	1		
.9				
1			10	
0		6		4
.1				1
.2		1	1	3
.3		1	1	2
.4	1		1	
.5		1	2	
.6				
.7	1		1	
.8	1	1	1	
.9	1		2	
1	6		1	

Т а б л и ц а 9.2

	b_1	b_2	b_3	b_4
0	1	1	1	1
.1	.9	.9	1	.5
.2	.9	.9	1	.3
.3	.7	.8	1	.1
.4	.6	.7	1	0
.5	.6	.6	1	0
.6	.4	.3	1	0
.7	.3	.3	1	0
.8	.3	.2	.9	0
.9	.2	0	.7	0
1	.1	0	.5	0
0	1	1	1	1
.1	.8	1	1	.7
.2	.7	.9	1	.5
.3	.6	.8	1	.1
.4	.6	.5	1	0
.5	.5	.3	1	0
.6	.3	.2	1	0
.7	.1	.2	1	0
.8	.1	.1	1	0
.9	0	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
.1	1	.4	1	.6
.2	1	.4	1	.5
.3	1	.3	.9	.2
.4	1	.2	.8	0
.5	.9	.2	.7	0
.6	.9	.1	.5	0
.7	.9	.1	.5	0
.8	.8	.1	.4	0
.9	.7	0	.3	0
1	.6	0	.1	0

Композиция шахтин, введенная ранее, используется здесь таким же образом, но для каждого уровня отдельно, начиная, например, с уровня $\alpha=1$ и заканчивая уровнем $\alpha=0$. На практике полезно сохранить одиннадцатипу- ровневую систему, поскольку это количество уровней оказывается доста- точным для изучения скрытых воздействий.

Приведем теперь пример анализа случайных нечетких квадратных матриц, оставляя более общий случай с прямоугольными матрицами для дальнейшего рассмотрения (см. § 11).

Т а б л и ц а 9.3

	a_1	a_2	a_3
0	1	1	1
.1	.4	0	1
.2	1	0	1
.3	1	0	1
.4	1	0	.8
.5	1	0	.7
.6	1	0	0
.7	1	0	0
.8	1	0	0
.9	1	0	0
1	1	0	0
0	1	1	1
.1	1	1	.9
.2	1	1	.9
.3	1	1	.9
.4	.6	1	.9
.5	.5	1	.9
.6	.4	1	.5
.7	.1	1	.4
.8	0	1	.3
.9	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	.8	1
.4	.5	.5	1
.5	.2	.2	1
.6	0	0	1
.7	0	0	1
.8	0	0	1
.9	0	0	1
1	0	0	1

$\tilde{R} =$

a_1

a_2

a_3

Т а б л и ц а 9.4

	a_1	a_2	a_3
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	.8	1
.4	1	.5	.8
.5	1	.2	.7
.6	1	0	0
.7	1	0	0
.8	1	0	0
.9	1	0	0
1	1	0	0
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
.4	.6	1	.9
.5	.5	1	.9
.6	.4	1	.5
.7	.1	1	.4
.8	0	1	.3
.9	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	.8	1
.4	.5	.5	1
.5	.2	.2	1
.6	0	0	1
.7	0	0	1
.8	0	0	1
.9	0	0	1
1	0	0	1

$\tilde{R}^2 =$

a_1

a_2

a_3

Пусть задано множество (9.3) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

и 10 экспертов оценили инцидентности элементов A на A в виде таблицы \tilde{R} (табл. 9.3) накопленных вероятностей, из которой для каждого уровня выписываются случайные нечеткие матрицы инцидентностей (знак $\tilde{\cdot}$ обозначает случайность нечетких отношений). По этим матрицам уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие \tilde{R}^2 (табл. 9.4) :

уровень 1:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
уровень 0.9:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	0																														
0	0	1																														
уровень 0.8:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>.3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	.3	0	0	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>.3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	.3	0	0	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>.3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	1	.3	0	0	1
1	0	0																														
0	1	.3																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	.3																														
0	0	1																														
1	0	0																														
0	1	.3																														
0	0	1																														
уровень 0.7:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.1</td><td>1</td><td>.4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.1	1	.4	0	0	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.1</td><td>1</td><td>.4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.1	1	.4	0	0	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.1</td><td>1</td><td>.4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.1	1	.4	0	0	1
1	0	0																														
.1	1	.4																														
0	0	1																														
1	0	0																														
.1	1	.4																														
0	0	1																														
1	0	0																														
.1	1	.4																														
0	0	1																														
уровень 0.6:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.4</td><td>1</td><td>.5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.4	1	.5	0	0	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.4</td><td>1</td><td>.5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.4	1	.5	0	0	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>.4</td><td>1</td><td>.5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	.4	1	.5	0	0	1
1	0	0																														
.4	1	.5																														
0	0	1																														
1	0	0																														
.4	1	.5																														
0	0	1																														
1	0	0																														
.4	1	.5																														
0	0	1																														
уровень 0.5:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>.7</td></tr><tr><td>.5</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.2</td><td>.2</td><td>1</td></tr></table>	1	0	.7	.5	1	.9	.2	.2	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>.7</td></tr><tr><td>.5</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.2</td><td>.2</td><td>1</td></tr></table>	1	0	.7	.5	1	.9	.2	.2	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>.2</td><td>.7</td></tr><tr><td>.5</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.2</td><td>.2</td><td>1</td></tr></table>	1	.2	.7	.5	1	.9	.2	.2	1
1	0	.7																														
.5	1	.9																														
.2	.2	1																														
1	0	.7																														
.5	1	.9																														
.2	.2	1																														
1	.2	.7																														
.5	1	.9																														
.2	.2	1																														
уровень 0.4:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>.8</td></tr><tr><td>.6</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.5</td><td>1</td></tr></table>	1	0	.8	.6	1	.9	.5	.5	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>.8</td></tr><tr><td>.6</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.5</td><td>1</td></tr></table>	1	0	.8	.6	1	.9	.5	.5	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>.5</td><td>.8</td></tr><tr><td>.6</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.5</td><td>1</td></tr></table>	1	.5	.8	.6	1	.9	.5	.5	1
1	0	.8																														
.6	1	.9																														
.5	.5	1																														
1	0	.8																														
.6	1	.9																														
.5	.5	1																														
1	.5	.8																														
.6	1	.9																														
.5	.5	1																														
уровень 0.3:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>.8</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	.8	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>.8</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	.8	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>.8</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>.8</td><td>1</td></tr></table>	1	.8	1	1	1	1	1	.8	1
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	.8	1																														
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	.8	1																														
1	.8	1																														
1	1	1																														
1	.8	1																														
уровень 0.2:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	1	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	1	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	1	1																														
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	1	1																														
1	1	1																														
1	1	1																														
1	1	1																														
уровень 0.1:	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	1	1	o	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>.9</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	.9	1	1	1	=	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	1	1																														
1	0	1																														
1	1	.9																														
1	1	1																														
1	1	1																														
1	1	1																														
1	1	1																														

Для уровня 0 все элементы матрицы равны 1.

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для R , так и для R^2 (табл. 9.5, 9.6).

Т а б л и ц а 9.5

	a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	.0	.2
.4	0	0	.1
.5	0	0	.7
.6	0	0	0
.7	0	0	0
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	1	0	0
a_2	0	0	.1
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	.4	0	0
.4	.1	0	0
.5	.1	0	.4
.6	.3	0	.1
.7	.1	0	.1
.8	0	0	.3
.9	0	0	0
1	0	1	0
a_3	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	.2	0
.3	.5	.3	0
.4	.3	.3	0
.5	.2	.2	0
.6	0	0	0
.7	0	0	0
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	0	0	1

Т а б л и ц а 9.6

	a_1	a_2	a_3
a_1	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	.2	0
.3	0	.3	.2
.4	0	.3	.1
.5	0	.2	.7
.6	0	0	0
.7	0	0	0
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	1	0	0
a_2	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	.4	0	.1
.4	.1	0	0
.5	.1	0	.4
.6	.3	0	.1
.7	.1	0	.1
.8	0	0	.3
.9	0	0	0
1	0	1	0
a_3	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	.2	0
.3	.5	.3	0
.4	.3	.3	0
.5	.2	.2	0
.6	0	0	0
.7	0	0	0
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	0	0	1

По элементарным вероятностям соответственно из табл. 9.5 и 9.6 можно вычислить математическое ожидание оценки инцидентности каждого элемента $a_i \in A$ на каждый элемент $a_j \in A$. Для этого при фиксированных i и j находится сумма всех попарных произведений значений уровня и его вероятности. Так, в нашем примере на основе табл. 9.5 для пары (a_1, a_3) математическое ожидание будет $E(a_1, a_3) = 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.7 = 0.45$.

В результате получим следующие матрицы математических ожиданий:

$$\varepsilon(R_1) =$$

	a1	a2	a3
a1	1	0	.45
a2	.46	1	.57
a3	.37	.35	1

$$\varepsilon(R_2) =$$

	a1	a2	a3
a1	1	.35	.45
a2	.46	1	.60
a3	.37	.35	1

Сравнение этих матриц дает возможность выявить скрытые (косвенные) воздействия второго порядка. Так, подобное воздействие проявляется, хотя и не очень интенсивно, для пары (a₁, a₂).

Маловероятно, что при использовании изложенного метода найдутся скрытые воздействия с отклонениями, близкими к единице. Это может произойти только при существенных отклонениях в мнениях экспертов или в случае примеров с большим количеством влияющих друг на друга факторов.

10. Использование экспертов

Предположим, что каждый эксперт, вместо того чтобы, как это делалось в предыдущем параграфе, выразить свое мнение с помощью одного числа из интервала [0, 1], производит оценку в виде доверительного интервала из [0, 1]. Это дает экспертам большую свободу выражения субъективных мнений.

Пусть снова требуется, чтобы 10 экспертов оценили по одиннадцатилетней шкале инцидентности элементов (9.1) множества A на элементы (9.2) множества B через доверительные интервалы. Например, это могут быть следующие оценки:

$$M^{(1)} =$$

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	[.3, .7]	[.4, .5]	[.6, .7]	.3
a ₂	[.2, .3]	[.8, 1]	.8	0
a ₃	1	[0, .3]	[0, .5]	[.6, .8]

$$M^{(2)} =$$

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	[.3, .6]	0	.3	[.1, .2]
a ₂	[.2, .5]	[.1, .2]	.9	0
a ₃	[.3, .4]	0	[0, .5]	[.9, 1]

$$M^{(3)} =$$

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	[.4, 1]	1	[0, .2]	.2
a ₂	[.5, .6]	[.9, 1]	1	[.2, .4]
a ₃	1	[.4, .5]	[0, .2]	[.7, .8]

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(4)} =$	a ₁	[.5, .7]	.3	[.1, .3]	[0, .2]
	a ₂	1	[.1, .2]	[.8, 1]	0
	a ₃	[.1, .4]	0	.3	1

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(5)} =$	a ₁	[0, .1]	[.5, .6]	0	[.1, .2]
	a ₂	[.4, 1]	1	[.7, .9]	0
	a ₃	1	0	[0, .2]	1

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(6)} =$	a ₁	.5	0	0	[.2, .3]
	a ₂	1	1	1	[0, .2]
	a ₃	0	[.1, .2]	0	[.6, 1]

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(7)} =$	a ₁	[.2, .3]	.6	.4	[.2, .4]
	a ₂	[.6, 1]	[.8, 1]	[.8, 1]	[.1, .3]
	a ₃	[.7, .9]	0	[.1, .3]	[.9, 1]

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(8)} =$	a ₁	[.4, .5]	0	[0, .3]	.5
	a ₂	[.7, 1]	[.9, 1]	.8	0
	a ₃	0	0	[.1, .3]	[.5, .8]

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(9)} =$	a ₁	[.2, .3]	[.3, .5]	[0, .1]	0
	a ₂	[.3, 1]	[.8, 1]	[.8, .9]	.1
	a ₃	1	.1	[.2, .3]	[.7, .8]

		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
$M^{(10)} =$	a ₁	.8	[0, .2]	[.1, .2]	[.6, .7]
	a ₂	1	1	[.8, .9]	0
	a ₃	[.2, .3]	0	.5	1

На основании этой информации устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α среди левых и правых концов доверительных интервалов (табл. 10.1).

Таблица 10.1

	b_1	b_2	b_3	b_4				
0	1	4	3	5	2	2	1	
.1		1		2	1	2		
.2	2		1		2	3	4	
.3	2	2	2	1	1	3	1	2
.4	2		1		1	1		
.5	2	2	1	2			1	1
.6		1	1	2	1		1	
.7		2				1		1
.8	1	1						
.9								
1		1	1	1				
0						7	6	
.1			2			2	1	
.2	2			2		1	1	
.3	1	1					1	
.4	1						1	
.5	1	1						
.6	1	1						
.7	1				1			
.8			3		6	2		
.9			2		1	4		
1	3	7	3	8	2	4		
0	2	2	7	6	5	1		
.1	1		2	1	2			
.2	1			1	1	2		
.3	1	1		1	1	4		
.4		2	1					
.5			1	1	3	1		
.6						2		
.7	1					2		
.8							4	
.9		1				2		
1	4	4				3	6	

Таблица 10.2

	b_1	b_2	b_3	b_4				
0	1	1	1	1	1	1	1	
.1	.9	1	.6	.7	.5	.8	.8	.9
.2	.9	.9	.6	.7	.3	.7	.6	.9
.3	.7	.9	.6	.6	.3	.5	.3	.5
.4	.5	.7	.4	.5	.2	.2	.2	.3
.5	.3	.7	.3	.5	.1	.1	.2	.2
.6	.1	.5	.2	.3	.1	.1	.1	.1
.7	.1	.4	.1	1	0	1	0	.1
.8	.1	.2	.1	.1	0	0	0	0
.9	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
1	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1	1	.3	.4
.2	1	1	.8	1	1	1	.1	.3
.3	.8	1	.8	.8	1	1	0	.2
.4	.7	.9	.8	.8	1	1	0	.1
.5	.6	.9	.8	.8	1	1	0	0
.6	.5	.8	.8	.8	1	1	0	0
.7	.4	.7	.8	.8	1	1	0	0
.8	.3	.7	.8	.8	.9	1	0	0
.9	.3	.7	.5	.8	.3	.8	0	0
1	.3	.7	.3	.8	.2	.4	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	.8	.8	.3	.4	.5	.9	1	1
.2	.7	.8	.1	.3	.3	.9	1	1
.3	.6	.8	.1	.2	.2	.7	1	1
.4	.5	.7	.1	.1	.1	.3	1	1
.5	.5	.5	0	.1	.1	.3	1	1
.6	.5	.5	0	0	0	0	.9	1
.7	.5	.5	0	0	0	0	.7	1
.8	.4	.5	0	0	0	0	.5	1
.9	.4	.5	0	0	0	0	.5	.6
1	.4	.4	0	0	0	0	.3	.6

$$R \approx$$

$$a_2$$

$$a_3$$

По данным из табл. 10.1 очевидным образом находятся соответствующие элементарные вероятности, по которым так же, как и ранее, находятся накопленные вероятности для каждой пары (a_i, b_j) , где $i=1,2,3; j=1,2,3,4$, и для обоих концов доверительных интервалов (табл. 10.2)

Конструкции, подобные табл. 10.2, как обобщение случайных нечетких матриц через доверительные интервалы названы нами экспертонами. Из табл. 10.2 для каждого уровня α выписываются матрицы инцидентий. Все операции, введенные для обычных матриц инцидентий, нечетких, Ф-нечетких, случайных нечетких инцидентий могут также осуществляться и с матрицами инцидентий по экспертонам. Понятно, что для последних расчеты становятся более длительными (увеличиваются в 22 раза при экспертонах по сравнению с нечеткими матрицами), однако при современном

уровне компьютеризации это не может быть сдерживающим фактором. Снова количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений.

Вернемся к мини-примеру с множеством A из (9.3) и используем экспертоны. Предполагается, что сотрудничество 10 экспертов привело к оценкам инцидентов, заданным в виде экспертона R (табл. 10.3).

Т а б л и ц а 10.3

	a_1	a_2	a_3
0	1	1	1
.1	1	1	.9 1
.2	1	1	.2
.3	1	1	0
.4	1	1	0
.5	1	1	0
.6	1	.9	0
.7	1	.6 .8	0
.8	1	.6 .8	0
.9	1	.3	0
1	1	.1	0
0	1	1	1
.1	1	1	.9 1
.2	1	1	.9
.3	.9 1	1	.9
.4	.9 1	1	.7 .8
.5	.7 .8	1	.7 .8
.6	.6 .7	1	.7
.7	.6 .7	1	.6 .7
.8	.6	1	.6
.9	.6	1	.6
1	.6	1	.3 .4
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	.6 .7	1
.3	1	.3 .4	1
.4	.9 1	.3	1
.5	.9 1	0	1
.6	.9	0	1
.7	.9	0	1
.8	.8	0	1
.9	.7 .8	0	1
1	.5 .6	0	1

По этой информации уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие экспертон R^2 (табл. 10.4):

$$\alpha=0.1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Для $\alpha=0$ все элементы матрицы равны 1.

Т а б л и ц а 10.4

		a_1	a_2	a_3
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
a_1	.4	1	1	.7 .8
	.5	1	1	.7 .8
	.6	1	.9	.7
	.7	1	.6 .8	.6 .7
	.8	1	.6 .8	.6
	.9	1	.3	.3
	1	1	.1	.1
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
$R^2 =$.3	.9 1	1	.9
a_2	.4	.9 1	1	.7 .8
	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
a_3	.4	.9 1	.9 1	1
	.5	.9 1	.9 1	1
	.6	.9	.9	1
	.7	.9	.6 .8	1
	.8	.8	.6 .8	1
	.9	.7 .8	.3	1
	1	.5 .6	.1	1

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для R , так и для R^2 (табл. 10.5, 10.6).

Т а б л и ц а 10.5

	a ₁	a ₂	a ₃
0			.1 0
.1			.7 .8
.2			.2
.3			
.4			
a ₁ .5		.1	
.6		.3 .1	
.7			
.8		.3 .5	
.9		.2	
1	1	.1	
0			.1 0
.1			0 .1
.2	.1 0		
.3			.2 .1
a ₂ .4	.2 .2		
.5	.1 .1		0 .1
.6			.1 0
.7	0 .1		0 .1
.8			
.9			.3 .2
1	.6	1	.3 .4
0			
.1		.4 .3	
.2		.3 .3	
.3	.1 0	0 .1	
a ₃ .4		.3	
.5	0 .1		
.6			
.7	.1 .1		
.8	.1 0		
.9	.2 .2		
1	.5 .6		1

Т а б л и ц а 10.6

	a ₁	a ₂	a ₃
0			.1 0
.1			0 .1
.2			
.3			.2 .1
.4			
a ₁ .5		.1 .1	0 .1
.6		.3 .1	.1 0
.7			0 .1
.8		.3 .5	.3
.9		.2	.2
1	1	.1	.1
0			.1 0
.1			0 .1
.2	.1 0		
.3			.2 .1
a ₂ .4	.2 .2		
.5	0 .1		0 .1
.6	.1 0		.1 0
.7	0 .1		0 .1
.8			
.9			.3 .2
1	.6	1	.3 .4
0			
.1			
.2			
.3	.1 0	.1 0	
a ₃ .4			
.5	0 .1	0 .1	
.6		.3 .1	
.7	.1 .1		
.8	.1 0	.3 .5	
.9	.2 .2	.2	
1	.5 .6	.1	1

По данным из табл. 10.5 и 10.6 вычислим соответственно матрицы математических ожиданий оценок инцидентов по концам доверительных интервалов:

$$\varepsilon(R) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & .75, .79 & .11, .11 \\ a_2 & .75, .80 & 1 & .69, .74 \\ a_3 & .86, .90 & .22, .24 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\varepsilon(R^2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & .75, .79 & .64, .68 \\ a_2 & .76, .80 & 1 & .69, .74 \\ a_3 & .86, .90 & .73, .79 & 1 \end{array} \end{array}$$

Возьмем теперь средние в доверительных интервалах:

$$\varepsilon(R) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .770 & .115 \\ a_2 & .775 & 1 & .715 \\ a_3 & .880 & .230 & 1 \end{array} \quad \varepsilon(R^2) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .770 & .660 \\ a_2 & .780 & 1 & .715 \\ a_3 & .880 & .760 & 1 \end{array}$$

Сравнение этих матриц позволяет выявить скрытые воздействия второго порядка. Наиболее существенно они проявляются для пар (a_1, a_3) и (a_3, a_2) .

Можно уточнить мнения экспертов, вводя дополнительно к доверительным интервалам еще одну оценку - максимально предполагаемое значение. Таким образом, получаются специфические интервальные оценки - доверительные тройки:

$$(a_1, a_2, a_3), \quad a_1, a_2, a_3 \in [0, 1], \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3,$$

и, как отмечалось в § 8, операции с ними такие же, как для доверительных интервалов (например, с использованием формул (8.2) и (8.3)).

Читатели, знакомые с теорией нечетких чисел и, в частности, с теорией нечетких треугольных чисел не должны смешивать доверительную тройку с нечетким треугольным числом. Последнее представляет собой две линейные функции принадлежности от a_1 до a_2 и от a_2 до a_3 . Для концов интервала функция принадлежности равна 0, а для максимально предполагаемого значения - 1. Операции (\wedge) и (\vee), осуществляемые с нечеткими числами, здесь уже проводятся над нечеткими числами, не являющимися в общем случае треугольными. Для доверительных троек они приводят к доверительным тройкам (без использования функций принадлежности). Однако и для доверительной тройки, так же как и для нечеткого треугольного числа, репрезентативное число определяется по формуле

$$\bar{a} = (a_1 + 2a_2 + a_3) / 4.$$

В формуле используется удвоение максимально предполагаемого значения по сравнению с концами интервала. Необходимость этого доказывается для нечетких треугольных чисел, и такой подход кажется наиболее удачным для доверительных троек.

Если, например, матрица инцидентий одного эксперта имеет вид

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3, .7, 1)	(.2, .3, .3)	(.5, .6, .8)	.8
a_2	1	(0, 0, .2)	(.4, .5, .7)	0
a_3	(.1, .2, .4)	.4	(.2, .2, .3)	(.6, .7, .8)

то эксперт с доверительными тройками может иметь вид, заданный табл. 10.7.

Т а б л и ц а 10.7

	b_1	b_2	b_3	b_4
0	1	1	1	1
.1	1	1	.8 .9 1	1
.2	1	1	.8 .9 1	.4 .5 .7
.3	.8 .9 1	1	.8 .8 .9	.2 .3 .3
.4	.8 .8 1	1	.8	0 .1 .1
a_1 .5	.8	1	.7 .7 .8	0
.6	.6 .7 .7	1	.7 .7 .8	0
.7	.4 .4 .5	1	.7 .7 .8	0
.8	.4	1	.7	0
.9	0 .1 .2	1	.5 .6 .7	0
1	0	1	.2 .4 .6	0
0	1	1	1	1
.1	0	.9	1	1
.2	0	.9	1	1
.3	0	.7 .8 .9	.9 .9 1	1
.4	0	.7 .7 .8	.8 .9 1	.5 .6 .7
a_2 .5	0	.6 .7 .7	.8 .9 1	.5 .6 .6
.6	0	.5	.8 .9 1	.5 .5 .6
.7	0	.4 .5 .5	.4 .8 .8	.5
.8	0	.2	.3	.4 .4 .5
.9	0	.1	.2 .3 .3	.4
1	0	0	.1	.4
0	1	1	1	1
.1	1	0	.9 1 1	1
.2	.5 .7 .8	0	.9 1 1	1
.3	.3 .5 .5	0	.9 .9 1	.9 1 1
.4	.1 .2 .2	0	.9	.9 .9 1
a_3 .5	0	0	.8 .9 .9	.9
.6	0	0	.8	.8 .8 .9
.7	0	0	.8	.7 .8 .9
.8	0	0	.8	.6 .7 .7
.9	0	0	.7 .8 .8	.6
1	0	0	.6	.6

Операции над экспертами с доверительными тройками осуществляются так же, как и с доверительными интервалами или с Ф-нечеткими матрицами.

Далее можно было бы рассмотреть еще одно обобщение интервальных оценок в виде доверительных четверок (a_1, a_2, a_3, a_4) , где a_1, a_4 - концы доверительного интервала; $[a_2, a_3]$ - доверительный интервал для максимально предполагаемого значения при $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$.

Операции (\wedge) и (\vee) зададим по формулам :

$$\begin{aligned}
 (m_1, m_2, m_3, m_4) (\wedge) (n_1, n_2, n_3, n_4) &= \\
 &= (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4) , \\
 (m_1, m_2, m_3, m_4) (\vee) (n_1, n_2, n_3, n_4) &= \\
 &= (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4) .
 \end{aligned}$$

При таком подходе не следует смешивать доверительные четверки с нечеткими трапециевидными числами.

Репрезентативное число для доверительной четверки вычисляется как

$$\hat{a} = (a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) / 6.$$

Дальнейший анализ с доверительными четверками осуществляется так же, как и с доверительными тройками.

11. Промежуточные причины скрытых воздействий

Для примера, приведенного в § 5, рассмотрим более подробно способы учета инцидентий с переходом на случайные нечеткие матрицы и матрицы по экспертам. Опишем схему влияния фактора 9 на фактор 12 через все другие факторы.

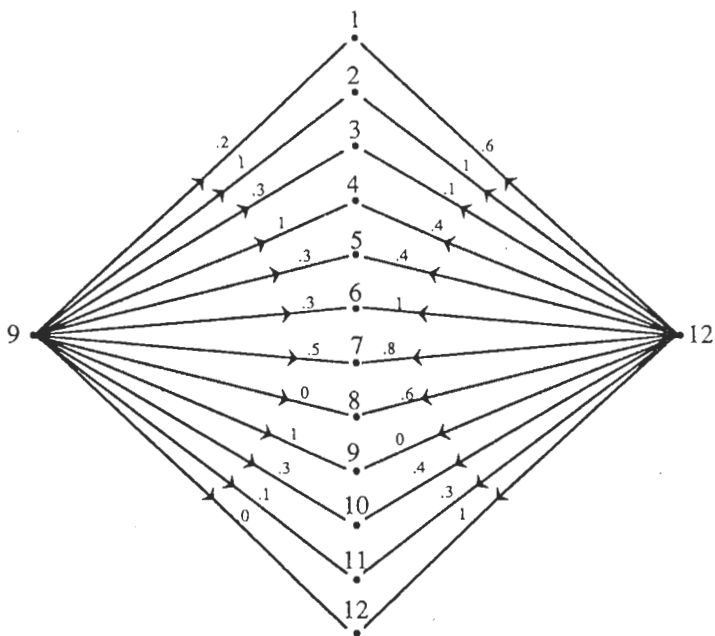


Рис. 11.1

Из рис. 11.1 видно, что максимум из минимумов двух следующих друг за другом инцидентий достигается на пути $9 \rightarrow 2 \rightarrow 12$, и он равен $1 \wedge 1 = 1$. Другие пути дают значения, меньшие или равные 0,5. Так, для пути $9 \rightarrow 7 \rightarrow 12$ получаем $0,5 \wedge 0,8 = 0,5$. Итак, инцидентия второго порядка для окружающей среды на оборону проявляется через население. В конечном счете окружающая среда оказывает существенное воздействие на оборону. Для того чтобы оборона была сильной, необходимо, чтобы население хотело защищать свою окружающую среду, свою родину, свои нравы и

обычай, исторические памятники и традиции. Для быстрого получения этого результата полезно расположить друг за другом 9-ю строку и 12-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.6	1	.1	.4	.4	1	.8	.6	0	.4	.3	1

Очевидно, что композиция шахмат соответствует фактору 2. Повторим этот же процесс для факторов 8 и 2.

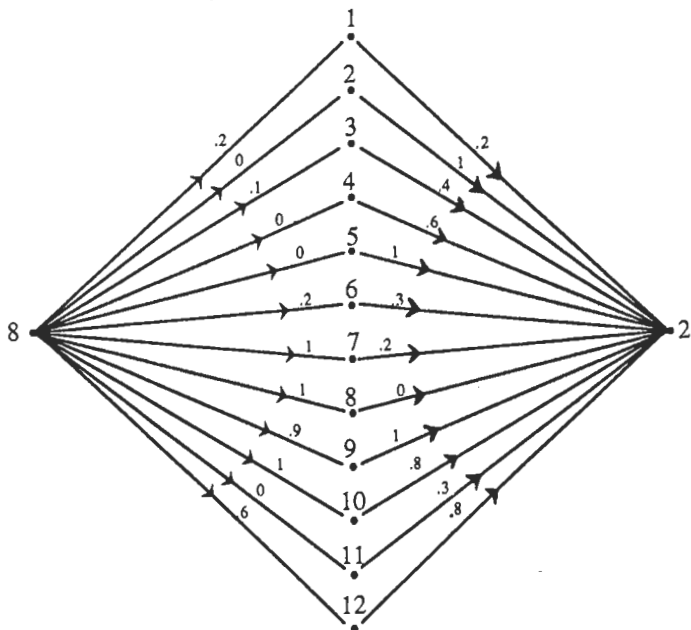


Рис. 11.2

Из рис.11.2 видно, что максимум из минимумов двух последовательных инцидентов достигается на пути $8 \rightarrow 9 \rightarrow 2$, и он равен $0.9 \wedge 1.0 = 1$. Другие пути дают значения, не превосходящие 0.8. Именно для пути $8 \rightarrow 10 \rightarrow 2$ получаем $1 \wedge 0.8 = 0.8$. Таким образом, видно, что наиболее важной причиной второго порядка влияния энергетики на население является окружающая среда: речь идет об известном влиянии промышленного загрязнения, однако оно не было отмечено непосредственно. Как и выше, для получения этого результата полезно было бы расположить друг за другом 8-ю строку и 2-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.4	.6	1	.3	.2	0	1	.8	.3	.8

Композиция шахтин в этом случае соответствует фактору 10. Однако нельзя исключать и фактор 10. Энергетика является абсолютно необходимой для транспорта, а транспорт имеет большую инцидентность на население. В качестве упражнений предлагаем читателю определить скрытые воздействия второго порядка для всевозможных остальных пар факторов, заданных в табл. 5.1.

Рассмотрим сейчас, как оперировать прямоугольными матрицами инцидентий. Для этого вернемся к примеру из § 6. С помощью (6.18) было отмечено наличие скрытого воздействия a_2 на b_1 . Воспроизведем эти инцидентии, начиная из a_2 , для того, чтобы перейти к b_1 , на основе композиции матриц $\underline{A} \circ \underline{M} \circ \underline{B}$, приведшей к \underline{M}^* . Схематично это можно представить в виде графа, изображенного на рис. 11.3.

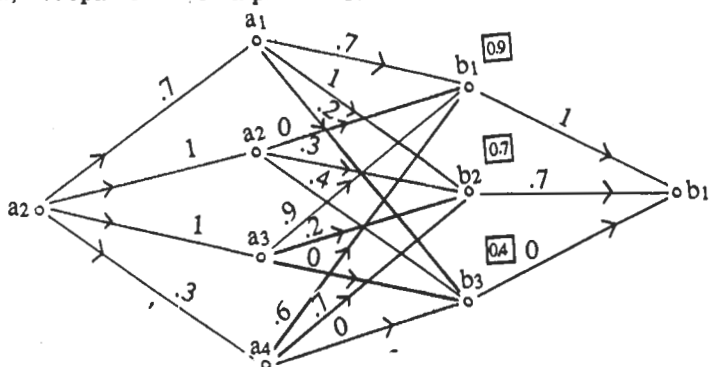


Рис. 11.3

Из рис. 11.3 видно, что вершина b_1 из a_2 достижима различными путями, каждый из которых содержит ровно три дуги. Поэтому вначале вычисляется композиция шахтин, соответствующая путям с двумя дугами до вершин b_1, b_2, b_3 (как элемент $\underline{A} \circ \underline{M}$), а потом композиция шахтин до конечной вершины b_1 (как элемент $\underline{A} \circ \underline{M} \circ \underline{B}$). Таким образом, на первом шаге получим:

- на пути к b_1 $0.7 \wedge 0.7 = 0.7, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 0.9 = 0.9, 0.3 \wedge 0.6 = 0.3$
и максимум равен 0.9,
- на пути к b_2 $0.7 \wedge 1 = 0.7, 1 \wedge 0.3 = 0.3, 1 \wedge 0.2 = 0.2, 0.3 \wedge 0.7 = 0.3$
и максимум равен 0.7,
- на пути к b_3 $0.7 \wedge 0.2 = 0.2, 1 \wedge 0.4 = 0.4, 1 \wedge 0 = 0, 0.3 \wedge 0 = 0$
и максимум равен 0.4.

Далее, на втором шаге вычисляем $0.9 \wedge 1 = 0.9$, $0.7 \wedge 0.7 \approx 0.7$, $0.4 \wedge 0 = 0$ с максимумом, равным 0.9 . По этому значению обратным ходом (как в динамическом программировании) восстанавливается путь $a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow b_1 \rightarrow b_1$ на графе, изображенном на рис.11.3. Отметим, что используемый способ может быть распространен также на инциденции третьего порядка, четвертого порядка и т. д. По (6.18) было найдено и скрытое воздействие a_1 на b_3 . Снова воспроизведем эти инциденции на основе матриц \underline{A} , \underline{M} , \underline{B} в виде графа, приведенного на рис.11.4.

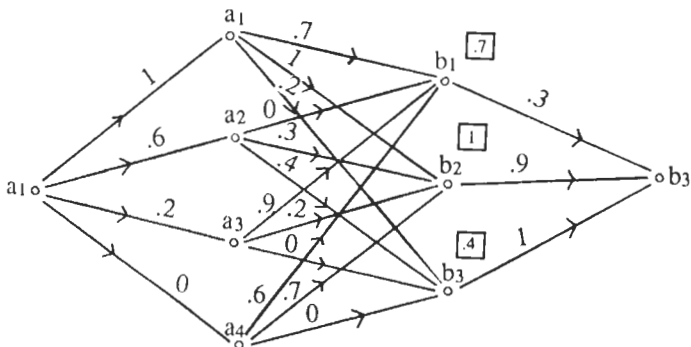


Рис. 11.4

Детальные вычисления, аналогичные только что проведенным, восстанавливают путь $a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3$, которому соответствует максимум $1 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$.

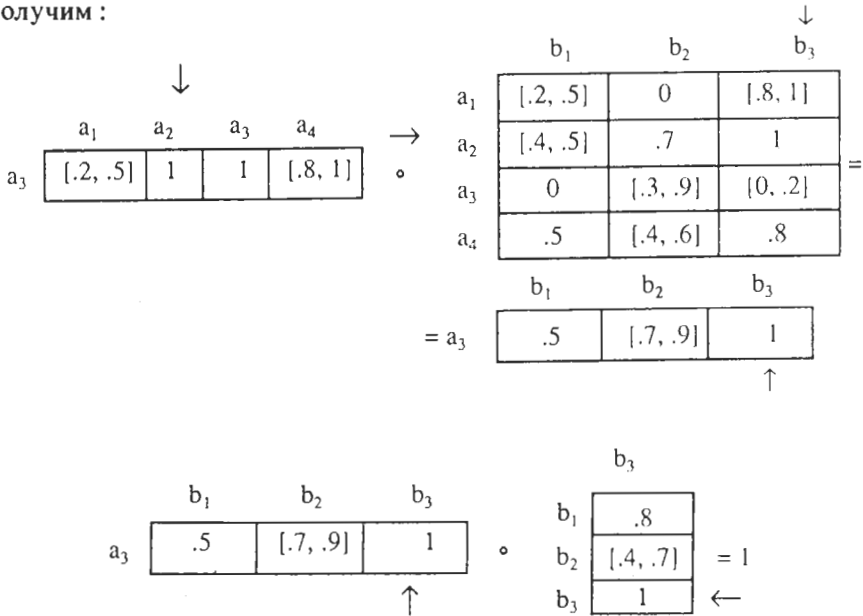
Таким образом, проявляется наиболее существенное косвенное воздействие a_1 на b_3 через b_2 . Все изложенное здесь на графах может быть объяснено и на матрицах. Так, для примера с рис. 11.4 можно использовать следующие матричные операции:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
 a_1 & \boxed{1} & \boxed{.6} & \boxed{.2} & \boxed{0}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \begin{array}{ccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 a_1 & \boxed{.7} & \boxed{1} & \boxed{.2} \\
 a_2 & \boxed{0} & \boxed{.3} & \boxed{.4} \\
 a_3 & \boxed{.9} & \boxed{.2} & \boxed{0} \\
 a_4 & \boxed{.6} & \boxed{.7} & \boxed{0}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 a_1 & \boxed{.7} & \boxed{1} & \boxed{.4}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \uparrow \\
 b_3
 \end{array}
 \end{array}$$

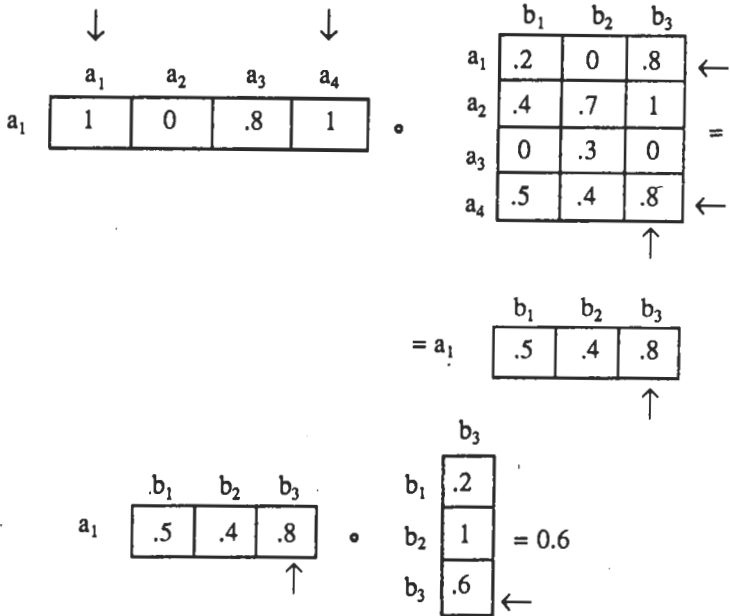
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 a_1 & \boxed{.7} & \boxed{1} & \boxed{.4}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \uparrow \\
 b_3
 \end{array}
 \leftarrow
 \begin{array}{c}
 b_1 \quad \boxed{.3} \\
 b_2 \quad \boxed{.9} \\
 b_3 \quad \boxed{1}
 \end{array}
 \leftarrow = 0.9
 \end{array}$$

Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь, на котором проявляется наиболее существенное косвенное воздействие. Понятно, что в общем случае может быть несколько путей, соответствующих одному и тому же максимуму. Существуют эффективные комбинаторные методы для нахождения всех этих путей.

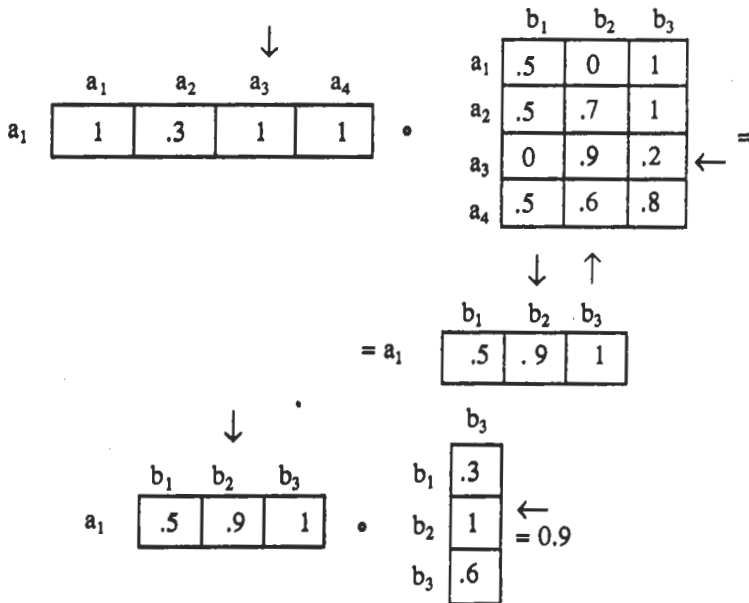
Предположим сейчас, что анализируемые матрицы являются Ф-матрицами. Предполагаемый метод в своей основе остается тем же, но, поскольку доверительные интервалы образуют частичный, а не полный порядок, проблема несколько усложняется. Матрица расстояний (типа (7.30)) укажет наличие скрытых воздействий. Восстановление факторов, через которые проявляется такое воздействие, проводится по схеме, обратной ходу вычислений. Действительно, если вернуться к рассмотрению (7.25) — (7.29) в поисках пути для скрытых воздействий a_3 на b_3 , то получим :



Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь $a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$. Кстати, на этот путь не влияет никакой доверительный интервал. Если же такое влияние имеется, то следует искать путь для левых и правых концов этих интервалов и делать необходимые выводы. Рассмотрим, например, «скрытое» воздействие a_1 на b_2 , которое по (7.30) было оценено в 0.75. Для левых концов интервалов получим :



По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_3 \rightarrow b_2$, соответствующий оценке 0.6. Для правых концов интервалов получим :



По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow b_2 \rightarrow b_2$, соответствующий оценке 0.9. Не следует удивляться, что получены разные пути для левых и правых концов интервалов, поскольку в этом случае отношения причины и следствия нечетки. Основное промежуточное воздействие задается правыми концами.

Ситуация осложняется при наличии нескольких путей для левых и (или) правых концов интервалов; в этом случае целесообразно ограничиться путями для правых концов. Единственный путь также получается при осуществлении расчетов на основе средних в доверительных интервалах, образующих Ф-нечеткие матрицы A, M, B .

Для доверительных троек анализ может проводиться так же, как и для доверительных интервалов. В этом случае можно проводить расчеты по правым и левым концам доверительных интервалов, а также по значениям максимума предполагаемого значения.

Возвратимся сейчас к случайным нечетким матрицам. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ и по схеме, изложенной в § 9, с помощью 10 экспертов найдены следующие элементарные и накопленные вероятности при оценке инцидентов множества A на A , множества A на B и множества B на B (табл. 11.1—11.6).

Т а б л и ц а 11.1

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	.2	0
	0	0	.3	0
	0	0	.3	.5
	0	0	.1	0
	0	0	.1	.2
	0	0	0	.3
	0	0	0	0
	0	0	0	0
a_2	1	1	0	0
	1	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	.2
	0	0	0	.4
	0	0	.1	.2
	0	0	.1	.1
	0	0	.1	0
	0	0	.1	0
	0	0	.1	.1
a_3	0	0	.3	0
	0	0	.3	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	.2	1	1
	0	1	0	0
	0	0	.4	0
	0	0	.3	0
	.2	0	.2	0
a_4	0	0	.1	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	.5	0	0	1

Т а б л и ц а 11.2

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	.8
	.4	1	1	.5
	.5	1	1	.2
	.6	1	1	.1
	.7	1	1	0
	.8	1	1	0
	.9	1	1	0
	1	1	1	0
a_2	0	1	1	1
	.1	0	1	1
	.2	0	1	1
	.3	0	1	1
	.4	0	1	1
	.5	0	1	.9
	.6	0	1	.8
	.7	0	1	.7
	.8	0	1	.6
	.9	0	1	.5
	1	0	1	.2
a_3	0	1	1	1
	.1	.8	1	1
	.2	.4	1	1
	.3	.3	1	1
	.4	.2	.8	1
	.5	.2	.6	1
	.6	.2	.6	1
	.7	0	.3	1
	.8	0	.2	1
	.9	0	.2	1
	1	0	.2	1
a_4	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	.6
	.3	1	0	.3
	.4	.8	0	.1
	.5	.8	0	0
	.6	.7	0	0
	.7	.6	0	0
	.8	.6	0	0
	.9	.5	0	0
	1	.5	0	0

Т а б л и ц а 11.3

	b_1	b_2	b_3
0	0	1	0
.1	0	0	0
.2	.2	0	0
.3	0	0	0
a_1 .4	.4	0	0
.5	.1	0	.1
.6	.2	0	0
.7	.1	0	.2
.8	0	0	.3
.9	0	0	0
1	0	0	.4
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	.7	0	0
.3	.1	0	0
a_2 .4	.1	0	0
.5	.1	0	0
.6	0	.2	0
.7	0	.3	0
.8	0	.3	0
.9	0	.2	.9
1	0	0	.1
0	0	0	1
.1	.7	0	0
.2	.1	0	0
.3	.2	0	0
a_3 .4	0	0	0
.5	0	0	0
.6	0	.2	0
.7	0	.4	0
.8	0	.3	0
.9	0	0	0
1	0	.1	0
0	.1	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	0
a_4 .4	.5	.2	.2
.5	0	.3	0
.6	.1	.3	.1
.7	0	.1	0
.8	.1	.1	0
.9	0	0	0
1	.2	0	.7

Т а б л и ц а 11.4

	b_1	b_2	b_3
0	1	1	1
.1	1	0	1
.2	1	0	1
.3	.8	0	1
a_1 .4	.8	0	1
.5	.4	0	1
.6	.3	0	.9
.7	.1	0	.9
.8	0	0	.7
.9	0	0	.4
1	0	0	.4
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	.3	1	1
a_2 .4	.2	1	1
.5	.1	1	1
.6	0	1	1
.7	0	.8	1
.8	0	.5	1
.9	0	.2	1
1	0	0	.1
$M =$ 0	1	1	1
.1	1	1	0
.2	.3	1	0
.3	.2	1	0
a_3 .4	0	1	0
.5	0	1	0
.6	0	1	0
.7	0	.8	0
.8	0	.4	0
.9	0	.1	0
1	0	.1	0
0	1	1	1
.1	.9	1	1
.2	.9	1	1
.3	.9	1	1
a_4 .4	.9	1	1
.5	.4	.8	.8
.6	.4	.5	.8
.7	.3	.2	.7
.8	.3	.1	.7
.9	.2	0	.7
1	.2	0	.7

Т а б л и ц а 11.5

	b_1	b_2	b_3
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	.7
.3	0	0	.1
.4	0	.2	.2
.5	0	.1	0
.6	0	0	0
.7	0	.2	0
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	1	.5	0
0	1	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	.2
.4	0	0	.2
.5	0	0	0
.6	0	0	.2
.7	0	0	.1
.8	0	0	0
.9	0	0	0
1	0	1	.3
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	.2	0
.4	.4	0	0
.5	.1	0	0
.6	0	0	0
.7	0	.2	0
.8	.1	.3	0
.9	.1	.2	0
1	.3	.1	1

Т а б л и ц а 11.6

	b_1	b_2	b_3
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	.3
.4	1	1	.2
.5	1	.8	0
.6	1	.7	0
.7	1	.7	0
.8	1	.5	0
.9	1	.5	0
1	1	.5	0
0	1	1	1
.1	0	1	1
.2	0	1	1
.3	0	1	1
.4	0	1	.8
.5	0	1	.6
.6	0	1	.6
.7	0	1	.4
.8	0	1	.3
.9	0	1	.3
1	0	1	.3
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
.4	1	.8	1
.5	.6	.8	1
.6	.5	.8	1
.7	.5	.8	1
.8	.5	.6	1
.9	.4	.3	1
1	.3	.1	1

$$\underline{B} =$$

Определим теперь $\underline{M}^* = \underline{A} \circ \underline{M} \circ \underline{B}$. Для этого для каждого уровня ($\alpha = 1, 0.9, 0.8, \dots, 0.1, 0$) вычислим \underline{M}^* :

$$\underline{M}^*_{\alpha=1} = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & .2 & 0 \\ \hline 0 & .2 & 1 & 1 \\ \hline .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & .4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & .1 & 0 \\ \hline .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & .5 & 0 \\ \hline 0 & 1 & .3 \\ \hline .3 & .1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline .3 & .1 & 1 \\ \hline .3 & .1 & 1 \\ \hline .3 & .2 & .7 \\ \hline .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array}$$

В матрицах $\underline{M}_{0.3}^*$, $\underline{M}_{0.2}^*$, $\underline{M}_{0.1}^*$, \underline{M}_0^* все элементы равны 1. Выпишем только матрицы $\underline{M}_{0.3}$, $\underline{M}_{0.2}$, $\underline{M}_{0.1}$:

$$\underline{M}_{0.3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .3 & 1 & 1 \\ a_3 & .2 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\underline{M}_{0.2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & .3 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\underline{M}_{0.1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

В целом случайные нечеткие инциденты множества А на В характеризуются накопленными вероятностями для всех уровней (табл. 11.7). По этой информации находятся элементарные вероятности инцидентов множества А на В для всех уровней (табл. 11.8).

Т а б л и ц а 11.7

	b_1	b_2	b_3
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
a_1 .4	1	1	1
.5	.6	1	1
.6	.5	1	1
.7	.5	.8	1
.8	.5	.6	1
.9	.4	.3	1
1	.3	.1	1
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
a_2 .4	1	1	1
.5	.6	1	1
.6	.5	1	1
.7	.5	.8	1
.8	.5	.6	1
.9	.4	.3	1
1	.3	.1	1
$M_{\pi}^* =$ 0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
a_3 .4	1	1	1
.5	.6	1	.8
.6	.5	1	.8
.7	.5	.8	.7
.8	.5	.6	.7
.9	.4	.3	.7
1	.3	.2	.7
0	1	1	1
.1	1	1	1
.2	1	1	1
.3	1	1	1
a_4 .4	1	1	1
.5	.6	.8	.8
.6	.5	.8	.8
.7	.5	.7	.7
.8	.5	.6	.7
.9	.4	.3	.7
1	.3	.2	.7

Т а б л и ц а 11.8

	b_1	b_2	b_3
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	0
a_1 .4	.4	0	0
.5	.1	0	0
.6	0	.2	0
.7	0	.2	0
.8	.1	.3	0
.9	.1	.2	0
1	.3	.1	1
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	0
a_2 .4	.4	0	0
.5	.1	0	0
.6	0	.2	0
.7	0	.2	0
.8	.1	.3	0
.9	.2	.2	0
1	.3	.1	1
0	0	0	1
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	0
a_3 .4	.4	0	.2
.5	.1	0	0
.6	0	.2	.1
.7	0	.2	0
.8	.1	.3	0
.9	.1	.1	0
1	.3	.2	.7
0	0	0	0
.1	0	0	0
.2	0	0	0
.3	0	0	0
a_4 .4	.4	.2	.2
.5	.1	0	0
.6	0	.1	.1
.7	0	.1	0
.8	0	.1	0
.9	.1	.1	0
1	.3	.2	.7

Теперь по элементарным вероятностям, приведенным в табл. 11.3 и 11.8, найдем математические ожидания для дискретной случайной величины α со значениями 0, 0.1, ..., 0.9, 1. Как известно, математическое ожидание дискретной случайной величины определяется как сумма произведений каждого из значений этой величины и вероятности его появления. Таким образом, получим:

$$\varepsilon(\underline{M}^*) =$$

	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0.68	0.78	1
a ₂	0.68	0.78	1
a ₃	0.68	0.79	0.84
a ₄	0.68	0.74	0.84

$$\varepsilon(\underline{M}) =$$

	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0.44	0	0.83
a ₂	0.26	0.75	1
a ₃	0.15	0.74	0
a ₄	0.54	0.56	0.84

Далее можно найти разность:

$$\varepsilon(\underline{M}^*) - \varepsilon(\underline{M}) =$$

	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	.24	.78	.17
a ₂	.42	.03	0
a ₃	.53	.05	.84
a ₄	.14	.18	0

Сравнивая эту матрицу с $\varepsilon(\underline{M})$, видим, что существенно проявляется скрытое воздействие a_3 на b_3 и a_1 на b_2 . Определим теперь, например, для первой пары и каждого уровня α промежуточные факторы, которые не учитываются непосредственно. Для этого используем следующие схемы:

$$\alpha = 1:$$

a ₁	a ₂	a ₃	a ₄
0	.2	1	1

$$\circ$$

	b ₁	b ₂	b ₃
a ₁	0	0	.4
a ₂	0	0	1
a ₃	0	.1	0
a ₄	.2	0	.7

$$\circ$$

	b ₃
b ₁	0
b ₂	.3
b ₃	1

$$= 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.9: a_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 0 & .2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & .2 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.8: a_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 0 & .2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .7 \\ a_2 & 0 & .5 & 1 \\ a_3 & 0 & .4 & 0 \\ a_4 & .3 & 1 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.7: a_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 0 & .3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .1 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & .8 & 1 \\ a_3 & 0 & .8 & 0 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .4 \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.6: a_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline .2 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .5 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .6 \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.8$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.5: a_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline .2 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & 0 & 1 \\ a_2 & .1 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .8 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .6 \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.8$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$\alpha = 0.4$: a_3

a1	a2	a3	a4
.2	.8	1	1

 \circ

	b1	b2	b3
a1	.8	0	1
a2	.2	1	1
a3	0	1	0
a4	.9	1	1

 \circ

	b3
b1	.2
b2	.8
b3	1

 = 1

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$\alpha = 0.3$: a_3

a1	a2	a3	a4
.3	1	1	1

 \circ

	b1	b2	b3
a1	.8	0	1
a2	.3	1	1
a3	.2	1	0
a4	.9	1	1

 \circ

	b3
b1	.3
b2	1
b3	1

 = 1

$a_3 \rightarrow a_3 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3$

$\alpha = 0.2$: a_3

a1	a2	a3	a4
.4	1	1	1

 \circ

	b1	b2	b3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	.3	1	0
a4	.9	1	1

 \circ

	b3
b1	1
b2	1
b3	1

 = 1

$a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1 \rightarrow b_3$
 $a_3 \quad b_2$
 $a_4 \quad b_3$

$\alpha = 0.1$: a_3

a1	a2	a3	a4
.8	1	1	1

 \circ

	b1	b2	b3
a1	1	0	1
a2	1	1	1
a3	1	1	0
a4	.9	1	1

 \circ

	b3
b1	1
b2	1
b3	1

 = 1

$a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1 \rightarrow b_3$
 $a_3 \quad b_2$
 $a_4 \quad b_3$

На всех уровнях встречается путь $a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3^*$, т. е. существенное скрытое воздействие возникает через промежуточные инциденции a_3 на a_4 , a_4 на b_3 и b_3 на b_3 .

Интересно, что можно сократить расчеты, если композицию проводить прямо над математическими ожиданиями, соответствующими \underline{A} , \underline{M} и \underline{B} . Для этого по табл. 11.1, 11.3 и 11.5 вычислим :

	a1	a2	a3	a4
a1	1	1	0.36	0.53
a2	0	1	0.77	0.37
a3	0.21	0.59	1	1
a4	0.75	0	0.20	1

 $\varepsilon(\underline{A}) =$

	b1	b2	b3
a1	0.44	0	0.83
a2	0.26	0.75	1
a3	0.15	0.74	0
a4	0.54	0.56	0.84

 $\varepsilon(\underline{M}) =$

$\varepsilon(\underline{B}) =$

	b1	b2	b3
b1	1	0.77	0.25
b2	0	1	0.63
b3	0.68	0.72	1

$$\varepsilon(\underline{A}) \circ \varepsilon(\underline{M}) \circ \varepsilon(\underline{B}) =$$

	b1	b2	b3
a1	0.68	0.75	1
a2	0.68	0.75	1
a3	0.68	0.74	0.84
a4	0.68	0.72	0.84

$$\varepsilon(\underline{A}) \circ \varepsilon(\underline{M}) \circ \varepsilon(\underline{B}) - \varepsilon(\underline{M}) =$$

	b1	b2	b3
a1	0.24	0.75	0.17
a2	0.42	0	0
a3	0.53	0	0.84
a4	0.14	0.16	0

Так же, как и по разности $\varepsilon(\underline{M}^*) - \varepsilon(\underline{M})$, при таком подходе обнаруживаются скрытые воздействия a_3 на b_3 и a_1 на b_2 . Для матриц большой размерности, когда большая точность не нужна, целесообразно применять именно этот метод.

В случае оценок, проводимых по доверительным интервалам или экспертам, методика выявления скрытых воздействий и их промежуточных

* В общем случае для различных уровней такие пути могут быть различными. Тогда целесообразнее выбирать пути, соответствующие большему уровню.

причин аналогична вышеизложенной. Каким бы ни был тип используемой оценки, предположение о том, что $R \subseteq E \times E$ (матрица квадратная), упрощает расчеты. При использовании компьютера для анализа важно организовать диалог — фактически речь и идет об экспертной системе.

12. Некоторые свойства нечетких рефлексивных матриц

Рассмотрим три простые теоремы.

Теорема 12.1. Пусть \underline{M} - нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

$$(12.1) \quad \forall x \in E \quad \mu_{\underline{M}}(x, x) = 1.$$

Тогда \underline{M}^2 - также нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

$$(12.2) \quad \forall x \in E \quad \mu_{\underline{M}^2}(x, x) = 1.$$

Доказательство. По определению имеем $\forall x, y, z \in E$

$$(12.3) \quad \mu_{\underline{M}^2}(x, z) = \bigvee_y (\mu_{\underline{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underline{M}}(y, z)).$$

Если $z = x$, то $\mu_{\underline{M}^2}(x, x) = \bigvee_y (\mu_{\underline{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underline{M}}(y, x))$.

Из всех пар (x, y) существует по крайней мере одна, для которой $\mu_{\underline{M}}(x, y) = 1$, в частности при $y = x$ $\mu_{\underline{M}}(x, x) = 1$, но тогда

$$\mu_{\underline{M}^2}(x, x) = \mu_{\underline{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underline{M}}(x, x) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Поэтому можно считать, что если \underline{M} рефлексивна, то \underline{M}^2 рефлексивна, или, в более общей форме, если \underline{M} рефлексивна, то \underline{M}^r рефлексивна при $r = 2, 3, 4, \dots$

Теорема 12.2. Если \underline{M} - нечеткая рефлексивная матрица, то $\forall x, y \in E \quad \mu_{\underline{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underline{M}}(x, y)$, т.е. $\underline{M}^2 \supset \underline{M}$.

Доказательство. В правой части формулы (12.3) под знаком \bigvee_y имеются по крайней мере два одинаковых члена (при $x \neq y$ для $y=x$ и $y=z$). Тогда $\mu_{\underline{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underline{M}}(x, z) = \mu_{\underline{M}}(x, z) \wedge \mu_{\underline{M}}(z, z) = \mu_{\underline{M}}(z, z)$, поскольку $\mu_{\underline{M}}(x, x) = \mu_{\underline{M}}(z, z) = 1$.

Следовательно, $\mu_{\underline{M}^2}(x, z)$ по крайней мере равно $\mu_{\underline{M}}(x, z)$, так как все выражение с \bigvee_y не может быть меньшим. Более того, может существовать $\mu_{\underline{M}}(x, z) \wedge \mu_{\underline{M}}(x, z)$, большее, чем $\mu_{\underline{M}}(x, z)$. Поэтому

$$\forall x, y \in E \quad \mu_{\underline{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underline{M}}(x, y)$$

т.е. $\underline{M}^2 \supset \underline{M}$ или в более общей форме $\underline{M}^{r+1} \supset \underline{M}^r$, $r = 1, 2, 3, \dots$

Теорема 12.3*. Если $\underline{A}_{m \times m}$ и $\underline{B}_{n \times n}$ - нечеткие рефлексивные матрицы и найдено $\underline{M}_{m \times n}^* = \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}$, то $\underline{M}_{m \times n}^* \supset \underline{M}_{m \times n}$.

Доказательство. Пусть $\underline{A}_{m \times m}$ - единичная матрица, тогда $\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} = \underline{M}_{m \times n}$, но можно записать: $\underline{A}_{m \times m} \supset \underline{A}_{m \times m}$, и поэтому $\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \supset \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} = \underline{M}_{m \times n}$.

Аналогично, если $\underline{B}_{n \times n}$ - единичная матрица, имеем $(\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}) \circ \underline{B}_{n \times n} = \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}$, и так как $\underline{B}_{n \times n} \supset \underline{B}_{n \times n}$, получаем $(\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}) \circ \underline{B}_{n \times n} \supset (\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}) \circ \underline{B}_{n \times n} = \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}$. С учетом (12.4) находим $(\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n}) \circ \underline{B}_{n \times n} \supset \underline{M}_{m \times n}$.

Так как операция \circ ассоциативна, то $\underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n} \supset \underline{M}_{m \times n}$ или в более общей форме $\underline{A}_{m \times m}^{r+1} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}^{r+1} \supset \underline{A}_{m \times m} \circ \underline{M}_{m \times n} \circ \underline{B}_{n \times n}^r$.

Эти теоремы использовались ранее в числовых примерах. Все они без затруднений переносятся на Ф-нечеткие матрицы, случайные нечеткие матрицы и матрицы с экспертонами, естественно, с сохранением специфики элементов, используемых в каждом из этих расширений.

13. Некоторые дополнительные приемы выявления скрытых воздействий

Если $\underline{M}_{m \times n}^{12}$ - нечеткая матрица, задающая инцидентности E_1 на E_2 и $\underline{M}_{n \times p}^{23}$ - нечеткая матрица, задающая инцидентности E_2 на E_3 , то может представлять интерес значение инцидентности E_1 на E_3 через инцидентности E_1 на E_2 и E_2 на E_3 . В этом случае рассчитываем $\underline{M}_{m \times p}^{13} = \underline{M}_{m \times n}^{12} \circ \underline{M}_{n \times p}^{23}$.

Скрытые воздействия можно выявить, если априори установлена \underline{M}^{13} для непосредственных инцидентностей E_1 на E_3 . Между элементами \underline{M}^{13} и \underline{M}^{13} существуют любые соотношения, и соответственно отклонения могут быть положительными, нулевыми или отрицательными. Если некоторые отклонения оказались существенными, то устанавливаются промежуточные инцидентности и матрица уточняется. Рассмотрим пример. Пусть задана матрица инцидентностей A на C :

* Это утверждение приведено в § 6, а здесь дается его строгое доказательство.

$$\underline{M}_{AC} = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline a_1 & .2 & 1 & .6 & 1 \\ a_2 & .5 & .2 & .5 & .2 \\ a_3 & .4 & .8 & 1 & .3 \end{array}$$

Пусть, кроме того, имеются матрицы инцидентий А на В и В на С:

$$\underline{M}_{AB} = \begin{array}{c|ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \hline a_1 & .7 & .8 & 0 & .4 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & .2 & 0 & .3 \\ a_3 & 0 & .4 & 0 & .7 & .5 \end{array} \quad \underline{M}_{BC} = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline b_1 & .3 & .2 & .4 & 1 \\ b_2 & 0 & .3 & .5 & .9 \\ b_3 & .8 & .4 & .5 & 0 \\ b_4 & 0 & .3 & .6 & .9 \\ b_5 & .8 & .8 & 1 & 1 \end{array}$$

Для этих матриц найдем

$$\underline{M}_{AB} - \underline{M}_{BC} = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline a_1 & .8 & .8 & 1 & 1 \\ a_2 & .3 & .3 & .5 & 1 \\ a_3 & .5 & .5 & .6 & .7 \end{array}$$

Вычислим отклонения :

$$\underline{M}_{AC} - \underline{M}_{AB} \circ \underline{M}_{BC} = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline a_1 & -0.6 & 0.2 & -0.4 & 0 \\ a_2 & 0.2 & -0.1 & 0 & -0.8 \\ a_3 & -0.1 & 0.3 & 0.4 & -0.4 \end{array}$$

Видно, что существенное отклонение соответствует паре (a_2, c_4) . Для этой пары восстановим все промежуточные инцидентии через В (рис 13.1).

Очевидно, что рассматриваемое отклонение определяется на путях $a_2 \rightarrow b_1 \rightarrow c_4$ и $a_2 \rightarrow b_2 \rightarrow c_4$. Аналогичным образом можно было бы изучать найденное отклонение, соответствующее паре (a_1, c_1) .

Перейдем сейчас к рассмотрению другого возможного случая. Пусть определены матрица \underline{A} инцидентий А на А (квадратная рефлексивная матрица) и прямоугольная матрица \underline{M}_{AB} инцидентий А на В. Вычислим $\underline{M}_{AB} = \underline{A} \circ \underline{M}_{AB}$. Как показано в предыдущем параграфе, $\underline{M}_{AB} \supset \underline{M}_{AB}$.

Вычислим разность $\underline{M}_{AB} - \underline{M}_{AB}$, которая используется для выявления скрытых воздействий. Подобным образом при наличии инцидентий А на В

и B на B вычисляется $\underline{M}_{AB}'' = \underline{A} \circ \underline{M}_{AB}$ и разность $\underline{M}_{AB}'' - \underline{M}_{AB}$. Свойство ассоциативности операции \circ дает отношение $\underline{M}_{AB}''' = \underline{A} \circ \underline{M}_{AB} \circ \underline{B}$, которое уже использовалось ранее.

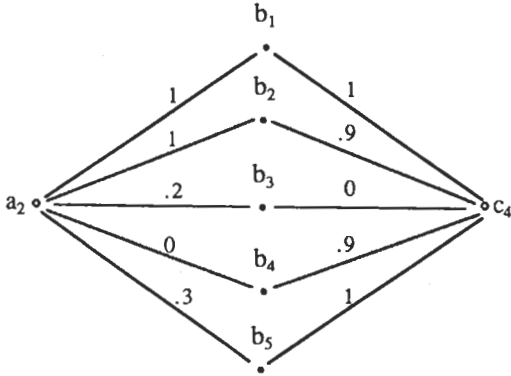


Рис 13.1

Изложенные приемы раскрывают широкие возможности для разработки новых процедур.