НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ

А. Кофман Х. Хил Алуха

МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Новые математические модели и методы в управлении

А. КОФМАН Х. ХИЛ АЛУХА

МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Перевод с испанского
под редакцией
В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1993

УДК 330.46

Кофман А., Хил Алуха Х. Модели для исследования скрытых воздействий: Пер. с исп. — Мн.: Выш. шк., 1993. — 160 с.: ил. — (Новые мат. модели и методы в управлении.) — ISBN 5-339-01016-3.

Предложены методы выявления скрытых, не учтенных экспертами воздействий при анализе и оценке причинно-следственных отношений множества отдельных факторов на себя или на множество других факторов. Рассмотрены случаи, когда оценки задаются в виде нечетких чисел или доверительных интервалов и допускается или не допускается согласование мнений экспертов. Приведены примеры использования методов при управлении избирательной кампанией, финансами, оценкой коммерческого имиджа и целей предприятий.

Для специалистов по менеджменту, математическому моделированию и студентов соответствующих специальностей вузов.

Табл. 51. Ил. 21. Библиогр.: 7 назв.

Серия основана в 1992 г.

Перевод с испанского
под редакцией В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

$$K\,\frac{0601000000-035}{М304(03)-93}\,БЗ\ 139-93$$

ISBN 5-339-01016-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Данная монография известного французского специалиста в области исследования операций профессора Арнольда Кофмана и его испанского коллеги профессора Хайме Хила Алухи опубликована в 1989 г. и является, насколько нам известно, первым систематизированным изложением математических методов проверки качества экспертных числовых оценок о влиянии (инциденций) каких-либо факторов на определенные свойства изучаемых систем из любой области человеческой деятельности. Обычно эксперты оценивают это влияние только непосредственно для пар "фактор—свойство", хотя существуют и косвенные (скрытые) инциденции множества факторов на себя и (или) множества свойств на себя. Даже при небольшом количестве факторов и свойств учет всевозможных скрытых воздействий без специальных методов затруднителен или вообще невозможен. Авторы предложили для этого эффективные математические модели и методы, основанные на операциях с соответствующими матрицами инциденций. Элементами матриц могут быть детерминированные или вероятностные оценки, нечеткие числа или доверительные интервалы. Их используют по-разному в зависимости от того, разрешается или не разрешается экспертам согласовывать свои мнения.

Материал, изложенный в книге, можно изучать, не обращаясь к другим источникам. Приведенные примеры иллюстрируют простоту предложенных методов и широчайшие возможности для их применения. Именно по этой причине мы включили книгу в серию "Новые математические модели и методы в управлении", подготавливаемую кафедрой математического обеспечения АСУ Белорусского государственного университета.

С согласия авторов несколько изменено название книги - оригинала — "Методы для исследования забытых воздействий". Этим самым подчеркивается, что неточности экспертных оценок носят не столько субъективный, сколько объективный характер. В то же время мы понимаем, что использованное нами название все-таки достаточно широко, потому что с общей точки зрения любое научное исследование занимается восстановлением скрытых взаимодействий в системах, явлениях, процессах.

Будем признательны читателям за замечания по содержанию выпущенных в серии книг, советы и пожелания по составу серии. Выражаем

благодарность Г.А.Москаленко за качественный перевод-подстрочник с испанского языка на русский настоящей и предыдущей [1] книг серии, а также Б.А.Юхименко за подготовку на компьютере оригиналов-макетов этих книг.

Наш адрес : 220050, Республика Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, кафедра МО АСУ.

В.В.Краснопрошин,
Н.А.Лепешинский

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Повсюду и всегда люди совершают ошибки и промахи вследствие забывчивости или небрежности. Даже при наличии самых мощных машин для хранения и обработки информации риск забыть что-либо никогда полностью не исчезнет. Поскольку мы находимся в окружении самых различных технологий, такое забывание может быть опасным, и поэтому необходима разработка методов профилактики через познание всевозможных причинно-следственных связей. Последовательности влияний (инциденций), цепочек вывода, следствий образуют сеть, в которой не всегда учитываются отдельные пути. Даже при двух или трех ступенях в рассуждениях могут быть пропущены возможные разветвления. Для того чтобы повысить эффективность исследований скрытых воздействий, используются компьютеры, для которых нужны соответствующие математические модели и методы. Данная книга претендует на изложение нескольких пригодных для этого моделей.

Все мы включены в системы и подсистемы разной природы: экономической, образовательной, профсоюзной, технологической. Окружающий нас мир — это ничто иное, как системы и подсистемы. Хотя в некоторых случаях можно составить четкие инструкции для управления (например, взлетом самолета, включением центрального отопления), всегда существует определенный риск небрежности или неблагоразумия, которого следует избежать. Риск не всегда бывает явным (заметным) или непосредственно ощущаемым; иногда он не очевиден и является следствием другого следствия, наслоением причин. Модели и методы, используемые для поиска скрытых воздействий, не совпадают с теми, которые описывают надежность систем. Они располагаются на предшествующем уровне анализа. Такие модели представляют собой графы со взвешенными дугами или вершинами. Весами дуг (вершин) могут быть числа из интервала [0,1] или доверительные интервалы с границами из [0,1]. Для анализа таких моделей может использоваться булева алгебра, или теория нечетких множеств, или теория "экспертонов". Методы не являются трудными ни для восприятия, ни для программирования. Они эффективны даже при большом объеме данных, когда следует использовать компьютер. Необходимые для изложения сведения из теории графов элементарны и по мере надобности приведены в книге.

Методы управления и методы исследования скрытых воздействий часто переплетаются и дополняют друг друга. Известный французский инженер и экономист Жан Форастье назвал скрытые воздействия следствиями второго поколения, особенно по отношению к политическим и социально-экономическим решениям, и отметил опасность неучета этих воздействий. Мы также осознаем эту опасность и надеемся, что разработанные нами методы помогут ее уменьшить. Иллюзией было бы считать, что этим самым предупреждается забывание. Тем не менее важным является постоянное устранение его причин. Это следует делать регулярно, так как в новых системах появляются новые следствия и цепочки выводов, которые могут быть неучтенными.

Детерминизм неприменим к анализу деятельности человека, предприятий, страны, общества. Механистическое понимание сложных систем уже исчерпало себя. Все вокруг является развивающимся и приспосабливающимся. Учет этого оказывается более трудным, но черезвычайно интересным. Настоящая книга не претендует на исчерпывающее изложение темы, однако может оказаться полезной в наше время, насыщенное информацией. Важность следствий второго, третьего и более высоких порядков заметна во всех сферах и областях принятия решений: в политике, экономике, предпринимательстве, технике, медицине, биологии и т.п. В книге приведены примеры применения предложенных методов. Они разработаны на основе данных, представленных экспериментами в каждой из соответствующих областей. Конечно, мы не настаиваем на полном принятии всех представленных оценок и у читателя может быть свое мнение по поводу их. Здесь следует иметь ввиду, что числами оценивались субъективные впечатления и примеры только иллюстрируют возможности методов.

Надеемся, что наши усилия были не напрасными, поскольку они позволили открыть широкий горизонт исследований.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ. МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОНЯТИЕ ИНЦИДЕНЦИИ

1. Введение

Концепция инциденции ассоциируется с идеей действия совокупности объектов на другую совокупность объектов или на саму себя. Так, хорошая погода имеет инциденцию на продажу летнего платья (благоприятную), на продажу зонтиков (неблагоприятную) и на посещаемость кинотеатров (неблагоприятную). Математически понятие инциденции может быть связано с общеизвестным понятием функции. Будем пользоваться им, переходя от самой простой (инциденция существует или не существует) к более сложным интерпретациям, включающим элементы рассуждений.

Понятие инциденции, которое встречается во всех действиях живых существ, внешне кажется очень простым, но заслуживает краткого научного объяснения. При рассуждениях чаще всего в явном виде его не используют, поскольку оно естественно и как бы автоматически возникает в процессе мышления. На самом же деле при достаточно сложных рассуждениях инциденции образуют пространственную сеть, в которой опущены многие этапы и не учтены выводы, разделенные более или менее осознанно. Даже в простейшей линейной цепочке выводов часто могут быть пропущены важные взаимодействия, и это приводит к искажению окончательно принимаемых решений. Плохо, если это случается в повседневной жизни, но, к сожалению, это бывает и на верхних уровнях принятия решений.

В наш век информатики и экспертных систем для наилучшего развития в условиях неопределенности необходимо предвидение. Предвидеть - это фактически полнее учитывать всевозможные, даже понимаемые субъективно, инциденции для аргументации действий и поступков.

Математический аппарат, используемый в рассмотренных ниже моделях, прост, и мы надеемся, что имеющихся в тексте объяснений, комментариев и примеров достаточно для его понимания. Сами модели легко программируются.

2. Инциденции первого порядка

Рассмотрим простой пример. Пусть A - множество объектов :

(2.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,

которое каким-то образом воздействует (будем говорить, имеет инциденцию) на множество B других объектов :

(2.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Можно считать, что если инциденция a_i на b_j существует, то значение пары (a_i,b_j) равно 1, и если этой инциденции не существует, то значение пары (a_i,b_j) равно 0. Совокупность значений, оцениваемых таким образом, определяет так называемую матрицу инциденций.

Рассмотрим, например, инциденцию множества A на множество B в виде матрицы

(2.3)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	0	1
a_2	0	0	1	0
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0

Из матрицы видно, например, что $v(a_1,b_3) = 0$, $v(a_1,b_4) = 1$, $v(a_2,b_3) = 1$, $v(a_5,b_3) = 0$ и т.д. Отметим, что элемент a_4 не имеет инциденции ни на один из элементов множества B. Матрица инциденций однозначно задает так называемый граф инциденций - двусторонний граф, вершины которого соответствуют элементам множеств A и B ,а ориентированные дуги — единичным элементам матрицы и только им. Для матрицы (2.3) получается граф инциденций, изображенный на рис.2.1.

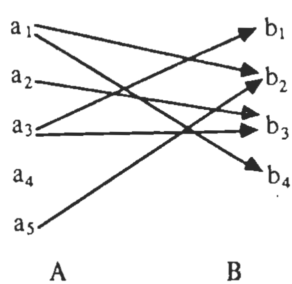


Рис. 2.1

В математике описываемое понятие называется многозначным отображением А в В. Можно использовать другую форму записи инциденций, в которой указывается, на какие элементы В имеет инциденцию каждый из элементов А:

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \Gamma\{a_1\} = \{b_2, b_4\}, \\ \Gamma\{a_2\} = \{b_3\}, \\ \Gamma\{a_3\} = \{b1, b3\}, \\ \Gamma\{a_4\} = \varnothing, \\ \Gamma\{a_5\} = \{b_2\}. \end{cases}$$

Факт, что a_4 не имеет инциденции ни на один элемент из В, обозначается символом $\varnothing$ - пустым множеством.

Если a_i имеет инциденцию на b_j, то можно говорить, что в свою очередь b_j находится "под влиянием" a_i. Если в матрице инциденций (2.3) строки сделать столбцами и столбцы строками, то получим матрицу, которую будем называть матрицей влияний. Для нашего примера имеем:

(2.5)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1			1		
b_2	1				1
b_3		1	1		
b_4	1				

Достаточно изменить ориентацию всех дуг графа на рис.2.1, чтобы получить граф влияний. Запись инциденций в форме (2.4) для влияний будет иметь вид:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \Gamma^{-1}\{b_1\} = \{a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_2\} = \{a_1, a_5\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_3\} = \{a_2, a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_4\} = \{a_1\}. \end{cases}$$

Итак, пусть рассматривается конечное множество А объектов

$$(2.7)\qquad A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

имеющее инциденцию на другое конечное множество В объектов

$$(2.8)\qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Можно считать, что если инциденция $a_l \in A$ на $b_j \in B$ существует, то значение v пары (a_i, b_j) равно 1, а если этой инциденции не существует, то значение v пары (a_i,b_j) равно 0. Матрица, образованная значениями всех этих пар, называется матрицей инциденций, а матрица, образованная значениями пар (b_j,a_i), — матрицей влияний.

Рассмотрим конкретный пример с оговоркой, что оценка степени инциденции только значениями 0 или 1 в излагаемой ситуации явно недостаточна. Будем расценивать этот фрагмент только как шаг к реально используемым моделям. Для автомобиля, пользующегося широким спросом, рассматриваются 6 технологических или коммерческих свойств:

$$\begin{cases} a_1 \text{ - мощность,} \\ a_2 \text{ - максимальная скорость,} \\ a_3 \text{ - тип подвески,} \\ a_4 \text{ - потребление горючего,} \\ a_5 \text{ - цена,} \\ a_6 \text{ - качество тормозной системы,} \end{cases} \tag{2.9}$$

и 5 качеств, ценимых водителями:

$$\begin{cases} b_1 \text{ - устойчивость на дороге,} \\ b_2 \text{ - безопасность,} \\ b_3 \text{ - комфорт,} \\ b_4 \text{ - престижность,} \\ b_5 \text{ - надежность.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Водитель мог бы следующим образом составить матрицу инциденций перечисленных свойств на качества:

(2.11)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1		1		1	
a_2				1	
a_3	1	1	1		
a_4			1		
a_5				1	
a_6	1	1			1

Это, конечно, только одна из возможных оценок водителя. Если в качестве оценок выбирать только 0 и 1, то трудно сформировать матрицу вида (2.11) и тем более ее использовать.

Отметим, что некоторые элементы A могут встретиться в B и наоборот. В некоторых случаях множества A и B совпадают. Тогда в матрице инциденций элементы главной диагонали будут равны 1, поскольку каждый объект имеет гипотетически полную инциденцию на самого себя. Рассмотрим пример матрицы инциденций, когда A=B. Пусть

(2.12) $\begin{cases} a_1 \text{ - климат,} \\ a_2 \text{ - сельское хозяйство,} \\ a_3 \text{ - здравоохранение,} \\ a_4 \text{ - промышленность,} \\ a_5 \text{ - образование;} \end{cases}$

(2.13) $\begin{cases} b_1 \text{ - климат,} \\ b_2 \text{ - сельское хозяйство,} \\ b_3 \text{ - здравоохранение,} \\ b_4 \text{ - промышленность,} \\ b_5 \text{ - образование.} \end{cases}$

Экономист мог бы оценить следующим образом инциденцию A на B:

(2.14)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1	0
a_3	0	0	1	0	1
a_4	1	1	0	1	0
a_5	0	0	1	1	1

Очевидно, что такие матрицы инциденций являются рефлексивными (главная диагональ образована из 1), но они несимметричны или симметричны в редких случаях. Например, климат имеет инциденцию на сельское хозяйство, но не наоборот. Здесь опять можно заметить трудности при формировании и использовании матриц только из значений 0 и 1.

Когда используется только одна матрица инциденций, говорят, что анализ отражает инциденции первого порядка. Перейдем далее к анализу того, что назовем инциденциями второго порядка.

3. Инциденции второго и более высоких порядков

Рассмотрим инциденцию множества A на множество B и инциденцию множества B на третье множество C. Пусть, например,

(3.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4,\}$,

(3.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, (3.3) $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Получаем инциденции, представленные двумя приведенными ниже матрицами и соответствующими графами инциденций (рис.3.1 и 3.2):

(3.4)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1			1	
a_2		1		1	1
a_3					1
a_4				1	

(3.5)

	c_1	c_2	c_3
b_1	1		
b_2			
b_3	1	1	
b_4		1	1
b_5	1		

В пустых клетках этих матриц подразумеваются нули.

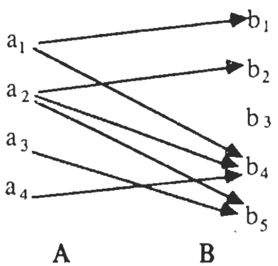


Рис. 3.1

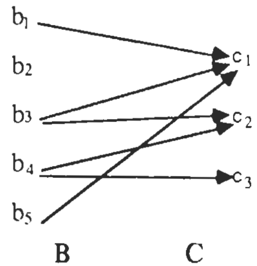


Рис. 3.2

Последовательное применение двух инциденций приводит к инциденции второго порядка (рис.3.3). Это инциденции элементов A на элементы C посредством B.

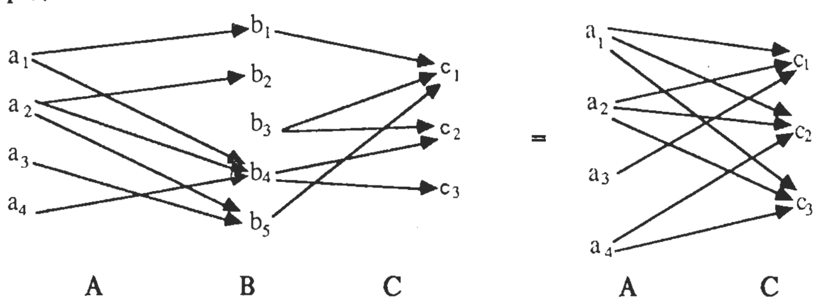


Рис. 3.3

Второму графу (правому) на рис.3.3 соответствует матрица инциденций второго порядка:

$$(3.6)\qquad \begin{array}{c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 1 & & \\ \hline a_4 & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

При записи инциденций в форме (2.4) получим :

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \Gamma_{AB}\{a_1\} = \{b_1, b_4\}, \\ \Gamma_{AB}\{a_2\} = \{b_2, b_4, b_5\}, \\ \Gamma_{AB}\{a_3\} = \{b_5\}, \\ \Gamma_{AB}\{a_4\} = \{b_4\}, \end{cases}$$

$$(3.8)\qquad \begin{cases} \Gamma_{BC}\{b_1\} = \{c_1\}, \\ \Gamma_{BC}\{b_2\} = \varnothing, \\ \Gamma_{BC}\{b_3\} = \{c_1, c_2\}, \\ \Gamma_{BC}\{b_4\} = \{c_2, c_3\}, \\ \Gamma_{BC}\{b_5\} = \{c_1\}, \end{cases}$$

и, например, из (3.6)

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \Gamma_{AC}\{a_1\} = \{c_1, c_2, c_3\}, \\ \Gamma_{AC}\{a_2\} = \{c_1, c_2, c_3\}, \\ \Gamma_{AC}\{a_3\} = \{c_1\}, \\ \Gamma_{AC}\{a_4\} = \{c_2, c_3\}. \end{cases}$$

Математическая операция, позволяющая распознать инциденцию A на C, зная инциденции A на B и B на C, называется композицией максимум-минимум или композицией maxmin. Ниже будет приведена соответствующая общая формула.

Приступим к анализу рис.3.3. Если существует хотя бы один путь от какой-либо вершины a_i к какой-то вершине c_k через промежуточную вершину b_j, т. е. тройка (a_i,b_j,c_k), то будет существовать дуга из a_i в c_k, т. е. пара (a_i,c_k). Таким способом образуется граф справа на рис.3.3 и соответствующая ему матрица инциденций второго порядка A на C.

Выведем математическую формулу, которая позволит построить матрицу (3.6) исходя из матриц (3.4) и (3.5). Пусть $\mu(a_i,b_j)$ - оценка клетки (a_i,b_j) в матрице (3.4), равная 0 или 1. Для матрицы (3.5) это будет оценка $\mu(b_j,c_k)$.

Введем два операторных символа. Пусть символ $\wedge$ означает выбор минимального (наименьшего) из двух элементов, а символ $\vee$ - максимального (наибольшего) из двух элементов. При этих обозначениях найдем оценки : клетки (a_1,c_1)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_1) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_1)) = \\
& = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = \\
& = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

клетки (a_1,c_2)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_2) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_2)) = \\
& = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = \\
& = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

клетки (a_3,c_3)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_3) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_3)) = \\
& = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = \\
& = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

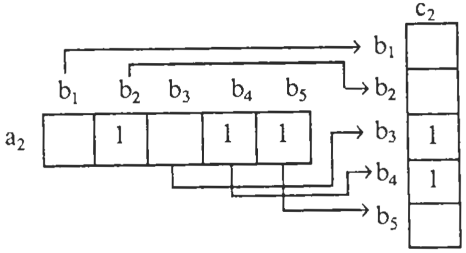
и так для всех элементов A, B и C. В общем случае, для всех a_i, b_j и c_k, где $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4,5$; $k=1,2,3$, получим

$$
\mu(a_i, c_k) = \bigvee_j (\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k)),
\tag{3.13}
$$

что определяет композицию maxmin для инциденции A на C посредством B, т. е. исходя из инциденций A на B и B на C.

Наглядно процедуру получения оценок клеток (a_i,c_k) можно представить в следующем виде. Так, если взять строку a_2 из (3.4) и столбец c_3 из (3.5), получаем:

(3.14)



$$
\rightarrow (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = a_2 \overset{c_2}{\boxed{1}}
$$

Рассмотрим на простом примере, какую пользу может принести введение инциденции второго порядка.

Предположим, что лицо (или лица), которое должно оценивать элементарные инциденции, представило непосредственные инциденции А на С в виде матрицы

(3.15)

	c_1	c_2	c_3
a_1	1		1
a_2	1	1	1
a_3	1		
a_4		1	

С другой стороны, используя инциденции А на В и В на С и операцию композиции maxmin, можно получить матрицу (3.6). Сравнивая (3.6) и (3.15), видим, что элементы в (3.15) оценены по какой-то причине неправильно. Действительно, пары (a_1,c_2) и (a_4,c_3) имеют значения 0 в (3.15) и 1 в (3.6). Можно сказать, что воздействия (a_1,c_2) и (a_4,c_3) являются скрытыми. Из рис.3.3 видно, что (a_1,c_2) должно было бы приобрести значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_1,b_4) и (b_4,c_2). Также (a_4,c_2) должно было бы иметь значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_4,b_4) и (b_4,c_2).

Может также случиться, что, наоборот, одна пара будет иметь значение 1 в (3.15) и 0 в (3.6). В этом случае целесообразно вернуться к анализу (3.15) для повторной оценки воздействий.

На этом примере видно, что степень субъективности оценок инциденций можно проверить, если известно, что они формируются через промежуточные объекты.

Теперь можно обобщить рассматриваемую схему и ввести инциденции третьего, четвертого и последующих порядков. Пусть M_{AB} - матрица инциденций А на В, M_{BC} - матрица инциденций В на С, M_{CD} - матрица инциденций С на D и т. д. Композиция maxmin, представленная математической формулой (3.13), должна повторяться необходимое число раз.

Для краткости записей обозначим композицию maxmin символом $\circ$. Тогда (3.13) будет иметь вид

(3.16) $$M_{AC} = M_{AB} \circ M_{BC}\,.$$

Для инциденции третьего порядка получим

(3.17) $$M_{AD} = M_{AB} \circ M_{BC} \circ M_{CD}\,.$$

Легко проверяется, что композиция maxmin обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(3.18) \qquad M_{AB} \circ (M_{BC} \circ M_{CD}) = (M_{AB} \circ M_{BC}) \circ M_{CD} ,$$

и поэтому порядок применения этой операции в выражениях типа (3.17) не имеет значения.

4. Использование нечетких матриц

В нечетком отношении (или в нечеткой матрице) $\underset{\sim}{M}$ оценка пары $(x_i, x_j) \in R \subset A \times B$, где A и B - заданные конечные множества или исходные данные, вместо того, чтобы принимать значение 0 или 1 (инциденция или неинциденция), может принять любое значение между 0 и 1, т. е.

$$(4.1) \qquad \forall (x_i, x_j) \in \underset{\sim}{M} \qquad v(x_i, x_j) \in [0, 1] .$$

Так, если A и B заданы в виде (2.1) и (2.2), то можно представить нечеткое отношение или нечеткое подмножество $A \times B$ в виде

(4.2)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.3	.7	0	1
a_2	.2	1	.4	0
a_3	.9	0	0	.3
a_4	.2	0	.8	1
a_5	0	.7	0	.5

В нашем примере в (4.2) оценки для простоты представлены числами с одним знаком после точки, хотя можно взять любое желаемое количество знаков.

По аналогии с рис.2.1 нечеткие отношения также можно представлять графами, причем на дугах указывать оценки соответствующих пар. Отсутствие дуги означает, что соответствующая инциденция имеет нулевую оценку. Таким образом, нечеткая матрица (4.2) представляется рис.4.1.

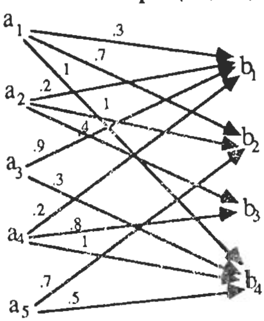


Рис. 4.1

Введение оттеночной оценки между 0 и 1 позволяет установить определенные уровни в понятии инциденции. Например, можно установить семантическое соответствие для 11 значений от 0 до 1 (так называемая одиннадцатиуровневая инциденция):

$$
(4.3) \qquad \begin{cases} 0 & \text{- без инциденции,} \\ 0.1 & \text{- практически без инциденции,} \\ 0.2 & \text{- почти без инциденции,} \\ 0.3 & \text{- очень слабая инциденция,} \\ 0.4 & \text{- слабая инциденция,} \\ 0.5 & \text{- средняя инциденция,} \\ 0.6 & \text{- ощутимая инциденция,} \\ 0.7 & \text{- значительная инциденция,} \\ 0.8 & \text{- сильная инциденция,} \\ 0.9 & \text{- очень сильная инциденция,} \\ 1 & \text{- наибольшая инциденция.} \end{cases}
$$

Однако субъективность понятия инциденции и введенных соответствий может препятствовать их широкому использованию. Возможно, что предпочтительнее окажутся оценки истинности высказывания

P : существует инциденция

и при этом

$$
(4.4) \qquad v(P) = \begin{cases} 0 & \text{- выражение ложно,} \\ 0.1 & \text{- практически ложно,} \\ 0.2 & \text{- почти ложно,} \\ 0.3 & \text{- достаточно ложно,} \\ 0.4 & \text{- скорее ложно, чем истинно,} \\ 0.5 & \text{- ни истинно, ни ложно,} \\ 0.6 & \text{- скорее истинно, чем ложно,} \\ 0.7 & \text{- достаточно истинно,} \\ 0.8 & \text{- почти истинно,} \\ 0.9 & \text{- практически истинно,} \\ 1 & \text{- истинно.} \end{cases}
$$

Если оценки уровня инциденции выбираются из интервала $[0,a]$, т. е. оценка $k \in [0,a]$, то

$$(4.5) \qquad v(P) = k / a ,$$

и если этот интервал имеет вид $[a_1,a_2]$, то

$$(4.6) \qquad v(P) = (k - a_1) / (a_2 - a_1) , \quad k,a_1,a_2 \in R^+ .$$

В случае необходимости возможно использование более сложных, чем (4.6), формул.

В качестве примера рассмотрим снова матрицу инциденций, касающуюся (2.9) и (2.10), через нечеткие оценки. Водитель мог бы предложить следующую нечеткую матрицу :

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	.2	.7	.4	1	0
a_2	0	.2	.5	1	.6
a_3	1	1	1	0	.4
a_4	0	0	.4	0	.2
a_5	.6	.8	.7	1	.6
a_6	1	1	.3	0	.8

(4.7)

Для примера (2.12) и (2.13) экономист мог бы дать следующие оценки:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	.9	.8	.1	.1
a_2	.1	1	.8	.3	.1
a_3	0	.1	1	.1	.4
a_4	.3	.2	.1	1	0
a_5	0	.3	.8	.8	1

(4.8)

В дальнейшем мы увидим преимущества использования нечетких оценок над двоичными, хотя уже можно догадаться, что введение оттеночности позволяет добиться более точного выражения мысли.

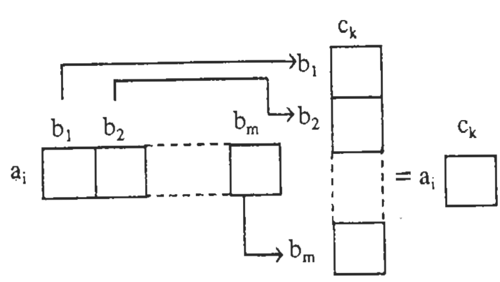
Перейдем сейчас к рассмотрению нечетких матриц инциденций второго и более высоких порядков. Для этого еще раз воспользуемся композицией maxmin, задаваемой формулой (3.13), с заменой оценок μ на оценки v при всех инциденциях.

Таким образом, для всех a_i, b_j и c_k

(4.9) $$v(a_i, c_k) = \bigvee_j (v(a_i, b_j) \wedge v(b_j, c_k)) .$$

Как и в (3.14), можно использовать схему этой композиции:

(4.10)



Пусть даны три множества:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \tag{4.11}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}, \tag{4.12}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \tag{4.13}$$

и нечеткие матрицы инциденций A на B и B на C:

$$\underset{\sim}{M}_{AB} = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .8 \\ a_2 & 1 & 0 & .6 \\ a_3 & .5 & .5 & .7 \\ a_4 & .3 & 0 & .8 \end{array} \tag{4.14}$$

$$\underset{\sim}{M}_{BC} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \hline b_1 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\ b_2 & .2 & .5 & .5 & .3 & .9 \\ b_3 & .8 & .6 & .1 & .2 & 0 \end{array} \tag{4.15}$$

Композиция maxmin вычисляется следующим образом:

$$\begin{cases} v(a_1, c_1) = (v(a_1,b_1) \wedge v(b_1, c_1)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_1)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_1)) = \\ \qquad = (0.3 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) = 0.8, \\ v(a_1, c_2) = (v(a_1,b_1) \wedge v(b_1, c_2)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_2)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_2)) = \\ \qquad = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.6) = 0.6, \\ v(a_1, c_3) = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.1) = 0.3, \\ v(a_1, c_4) = (0.3 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.2) = 0.3, \\ v(a_1, c_5) = (0.3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0) = 0, \\ v(a_2, c_1) = (1 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) = 0.9, \\ v(a_2, c_2) = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.6) = 1, \end{cases} \tag{4.16}$$

т. е. получаем

(4.17) $\underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{M}_{BC} = \underset{\sim}{M}_{AC}$

или конкретно

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .3 & 0 & .8 \\
a_2 & 1 & 0 & .6 \\
a_3 & .5 & .5 & .7 \\
a_4 & .3 & 0 & .8 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
\hline
b_1 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\
b_2 & .2 & .5 & .5 & .3 & .9 \\
b_3 & .8 & .6 & .1 & .2 & 0 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
=
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
\hline
a_1 & .8 & .6 & .3 & .3 & 0 \\
a_2 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\
a_3 & .7 & .6 & .5 & .4 & .5 \\
a_4 & .8 & .6 & .3 & .3 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Если $\underset{\sim}{M}_{AB}$ имеет l строк и m столбцов, а $\underset{\sim}{M}_{BC}$ — m строк и n столбцов, то $\underset{\sim}{M}_{AC}$ должна иметь l строк и n столбцов. В противном случае композиция была бы невозможна.

Отметим сейчас два свойства матриц инциденций (нечетких или двоичных). Если даны три матрицы инциденций $\underset{\sim}{A}_{l \times m}$, $\underset{\sim}{B}_{m \times n}$, $\underset{\sim}{C}_{n \times p}$, то выполняется

(4.18) $\underset{\sim}{A}_{l \times m} \circ \underset{\sim}{B}_{m \times n} = \underset{\sim}{B}_{m \times n} \circ \underset{\sim}{A}_{l \times m}$,

причем сравнение композиций может проводиться лишь в том случае, если l=m=n, и только в частных случаях может выполняться равенство. В любом случае также выполняются свойства ассоциативности

(4.19) $\underset{\sim}{A}_{l \times m} \circ (\underset{\sim}{B}_{m \times n} \circ \underset{\sim}{C}_{n \times p}) = (\underset{\sim}{A}_{l \times m} \circ \underset{\sim}{B}_{m \times n}) \circ \underset{\sim}{C}_{n \times p}$.

Ниже рассмотрим и другие свойства.

Представим сейчас композицию (4.17) в форме графов (рис. 4.2).

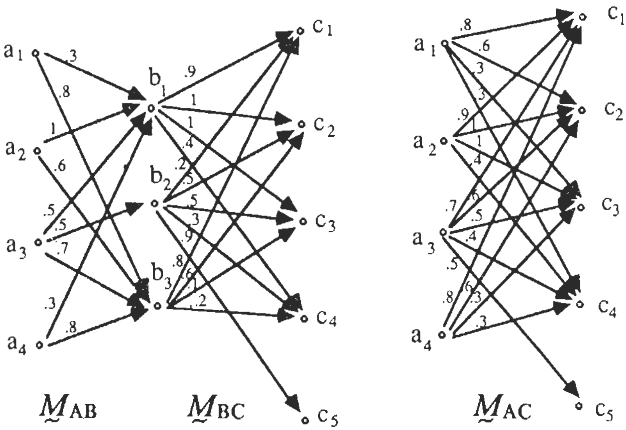


Рис. 4.2

До рассмотрения других свойств матриц инциденций разберем далее практический пример с тем, чтобы читатель смог увидеть полезность введенных понятий.

5. Пример исследования скрытых воздействий с помощью матриц инциденций

Пример взят из работ [2], [3], посвященных методам моделирования и методам принятия управленческих решений в условиях неопределенности. Советуем читателям, заинтересованным в исследовании скрытых воздействий, обратить внимание на методы моделирования и исследования операций как из-за многочисленных аналогий между различными моделями, так и из-за многих однотипных действий при использовании компьютеров для обработки данных. Рассматриваемый пример является расширением в область нечеткости трехзначной (с тремя уровнями оценки) матрицы инциденций, введенной Николасом Валери, издателем и директором журнала " New Scientist" (Великобритания). Это расширение поможет нам пояснить, как применяются матрицы инциденций для исследования скрытых воздействий или следствий второго порядка. В этом случае группой экспертов после предварительных обсуждений устанавливаются оценки экономических или социальных взаимосвязей. Конечно, мы не будем считать, что это окончательные оценки, имея в виду чисто учебную цель примера. Рассмотрим 12 секторов, определяющих жизнедеятельность людей: 1) климат; 2) население; 3) сельское хозяйство; 4) здравоохранение; 5) образование; 6) наука и техника; 7) промышленность; 8) энергетика; 9) окружающая среда; 10) транспорт; 11) связь; 12) оборона.

Построим квадратную матрицу 12×12, строки и столбцы которой соответствуют введенным секторам, а элементы представляют оценки экспертов. Поскольку матрица рефлексивна и на ее главной диагонали будут стоять единицы, то необходимо установить 132 оценки (12×12-12).

Таблица 5.1

$\underset{\sim}{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.2	.9	.8	.1	.5	.1	.5	.8	.2	.3	.6
2	0	1	.3	.9	.8	.6	.5	.7	.6	.8	.5	1
3	.1	.4	1	.8	.1	.1	.3	.2	1	.2	0	.1
4	0	.6	.1	1	.4	.2	.1	.1	.2	0	0	.4
5	0	1	.3	.8	1	1	.8	.3	.5	.2	.2	.4
6	.2	.3	.4	.6	.5	1	1	1	.8	1	1	1
7	.3	.2	.2	.1	0	.3	1	.2	.8	.4	.3	.8
8	.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6
9	.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0
10	.1	.8	.2	.3	0	0	.8	.6	.2	1	.2	.4
11	0	.3	0	.1	0	.2	.3	.2	.3	.3	1	.3
12	0	.8	.1	0	.1	1	.6	.5	0	.2	.1	1

В табл. 5.1 приведены инциденции, оцененные экспертами. Так, климат (строка 1) имеет инциденцию, оцениваемую в 0.8 на здравоохранение. Это важный фактор для здравоохранения (строка 4), но он не единственный. Образование (строка 5) имеет инциденцию, оцениваемую в 1 на население (столбец 2): для ближайшего будущего образование оказывается существенным для населения и т.д.

Таким образом, группа экспертов дала свои оценки для прямых непосредственных воздействий. Попытаемся обнаружить воздействия второго порядка с помощью следующих расчетов:

(5.1) $$\underset{\sim}{M}_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(1)} \circ \underset{\sim}{M}_{(1)} .$$

Легко доказать, что если матрица $\underset{\sim}{M}$ является рефлексивной (т.е. ее главная диагональ состоит из единиц), элементы матрицы будут не меньше, чем соответствующие элементы матрицы $\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}$, т.е.

(5.2) $$\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M} .$$

Как будет показано ниже, это важно, поскольку можно будет использовать разность

(5.3) $$\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{M}$$

для исключения воздействий первого порядка из воздействий второго порядка, задаваемых матрицей $\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}$. Сначала вычислим

(5.4) $$\underset{\sim}{M}_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(1)} \circ \underset{\sim}{M}_{(1)}.$$

Это приводит к матрице, представленной табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

$\underset{\sim}{M}_{(2)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.8	.9	.8	.5	.6	.6	.5	.9	.5	.5	.6
2	.3	1	.4	.9	.8	1	.8	.7	.7	.8	.6	1
3	.3	1	1	1	.4	.4	.5	.4	1	.4	.4	.4
4	.2	.6	.3	1	.6	.6	.5	.6	.6	.6	.5	.6
5	.3	1	.4	.9	1	1	1	1	.8	1	1	1
6	.3	.8	.4	.8	.5	1	1	1	.9	1	1	1
7	.3	.8	.3	.8	.3	.8	1	.5	.8	.4	.3	.8
8	.3	.9	.3	.9	.3	.6	1	1	.9	1	.3	.8
9	.3	1	.3	1	.8	.6	.5	.7	1	.8	.5	1
10	.3	.8	.3	.8	.8	.6	.8	.7	.8	1	.5	.8
11	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	1	.3
12	.3	.8	.4	.8	.8	1	1	1	.8	1	1	1

Вычислим далее

(5.5) $$\underset{\sim}{M}'_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(2)} - \underset{\sim}{M}_{(1)}$$

с целью выявления воздействий второго порядка. Получим матрицу, представленную табл. 5.3.

Сравнение элементов приведенных матриц (см. табл. 5.1 — 5.3) позволяет установить скрытые воздействия (инциденции второго порядка). Выпишем наиболее значимые из них:

(5.6)

- (9 ⟶ 12) окружающая среда - оборона,
- (8 ⟶ 2) энергетика - население,
- (8 ⟶ 4) энергетика - здравоохранение,
- (12 ⟶ 11) оборона - связь,
- (5 ⟶ 10) образование - транспорт,
- (5 ⟶ 11) образование - связь,
- (10 ⟶ 5) транспорт - образование,
- (12 ⟶ 4) оборона - здравоохранение,
- (12 ⟶ 9) оборона - окружающая среда,
- (12 ⟶ 10) оборона - транспорт.

Т а б л и ц а 5.3

$\underset{\sim}{M}_{(2)} - \underset{\sim}{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.6	0	0	.4	.1	.5	0	.1	.3	.2	0
2	.3	0	.1	0	0	.4	.3	0	.1	0	.1	0
3	.2	.6	0	.2	.3	.3	.2	.2	0	.2	.4	.3
4	.2	0	.2	0	.2	.4	.4	.5	.4	.6	.5	.2
5	.3	0	.1	.1	0	0	.2	.7	.3	.8	.8	.6
6	.1	.5	0	.2	0	0	0	0	.1	0	0	0
7	0	.6	.1	.7	.3	.5	0	.3	0	0	0	0
8	.1	.9	.2	.9	.3	.4	0	0	0	0	.3	.2
9	.1	0	0	0	.5	.3	0	.7	0	.5	.4	1
10	.2	0	.1	.5	.8	.6	0	.1	.6	0	.3	.4
11	.3	0	.3	.2	.3	.1	0	.1	0	0	0	0
12	.3	0	.3	.8	.7	0	.4	.5	.8	.8	.9	0

Восстановим теперь промежуточные инциденции, с помощью которых можно обнаружить скрытые воздействия. Для этого используем (табл.5.1) и определим наибольший из минимумов между каждым элементом строки входа и соответствующим элементом выхода. Получим:

(5.7) $(9 \longrightarrow 12):\quad 9 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 12 \qquad 1$

вместо $\quad 9 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 12 \qquad 0 \qquad 1 - 0 = 1$

(5.8) $(8 \longrightarrow 2):\quad 8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 2 \qquad 0.9$

вместо $\quad 8 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 2 \qquad 0 \qquad 0.9 - 0 = 0.9$

(5.9) $(8 \longrightarrow 4):\quad 8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 4 \qquad 0.9$

вместо $\quad 8 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4 \qquad 0 \qquad 0.9 - 0 = 0.9$

(5.10) $(12 \longrightarrow 11):\quad 12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \qquad 1$

вместо $\quad 12 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 11 \qquad 0.1 \qquad 1 - 0.1 = 0.9$

(5.11) $(5 \longrightarrow 10):\quad 5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10 \qquad 1$

вместо $\quad 5 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 10 \qquad 0.2 \qquad 1 - 0.2 = 0.8$

(5.12) $(5 \longrightarrow 11):\quad 5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11 \qquad 1$

вместо $\quad 5 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 11 \qquad 0.2 \qquad 1 - 0.2 = 0.8$

(5.13)	(10 $\longrightarrow$ 5) :	$10 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.8} 5$	0.8	
вместо		$10 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 5$	0	0.8 - 0 = 0.8
(5.14)	(12 $\longrightarrow$ 10) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10$	1	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 10$	0.2	1 - 0.2 = 0.8
(5.15)	(12 $\longrightarrow$ 9) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{0.8} 9$	0.8	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 9$	0	0.8 - 0 = 0.8
(5.16)	(12 $\longrightarrow$ 4) :	$12 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.9} 4$	0.8	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4$	0	0.8 - 0 = 0.8.

Попытаемся интерпретировать некоторые из этих результатов. Например, непосредственно окружающая среда (строка 9) не оказывает никакого влияния на оборону (столбец 12), но проявляется вторичное воздействие через население (строка 2): лучше защищается собственная страна, чем иностранная территория. Оборона главным образом занимается защитой собственного населения. Подобным же образом энергетика (строка 8) не оказывает непосредственного влияния на население (столбец 2), но существует важное вторичное воздействие через окружающую среду (строка 9), т. е. очень активный вторичный эффект загрязнения не принимался во внимание.

Оставим читателю анализ и объяснение остальных перечисленных выше вторичных воздействий ((5.9) - (5.16)). Кроме того, можно изучить вторичные воздействия со значениями отклонений, меньших 0.8.

Конечно, детальные исследования должны были бы включать значительно большее количество секторов (параметров). Интуитивно ясно, что чем большее число параметров рассматривается (т. е. чем выше размерность матрицы $\underset{\sim}{M}_{(1)}$), тем больше возможностей существует для выявления значительного числа скрытых воздействий. Сразу же возникает необходимость использования компьютера.

В определенных случаях могут изучаться воздействия третьего порядка. С этой целью вычисляется разность $\underset{\sim}{M}_{(3)} - \underset{\sim}{M}_{(2)}$ для исключения воздействий второго порядка из воздействий второго и третьего порядков. Здесь появляется еще больше вариантов при анализе возможных косвенных воздействий.

6. Второй пример (с прямоугольной матрицей)

Прежде всего напомним одно из свойств прямоугольных матриц. Известно, что единичная матрица - это матрица размерности nxn, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Обозначим эту матрицу через U_{nxn}. Если $\underset{\sim}{M}_{mxn}$ - нечеткая матрица, то имеем

(6.1) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \circ U_{nxn} = \underset{\sim}{M}_{mxn}$$

или

(6.2) $$U_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} = \underset{\sim}{M}_{mxn} .$$

Пусть $\underset{\sim}{B}_{nxn}$ - рефлексивная нечеткая матрица. Если вычислить $\underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn}$, то всегда

(6.3) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn} ,$$

так как $\underset{\sim}{B}_{nxn} \supset U_{nxn}$.

Аналогично если $\underset{\sim}{A}_{mxm}$ - рефлексивная нечеткая матрица, то для матрицы $\underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn}$ получим :

(6.4) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} .$$

Объединяя (6.3) и (6.4), можно записать:

(6.5) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn} .$$

Если ввести $\underset{\sim}{M}'_{mxn} = \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn}$, то получим

(6.6) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{M}'_{mxn} .$$

Если $\underset{\sim}{M}$ - матрица инциденций элементов A на элементы B , т.е.

(6.7) $$\underset{\sim}{M} \subset A \times B ,$$

то, определив воздействия второго порядка, получим

(6.8) $$\underset{\sim}{A} \subset A \times A$$

и

(6.9) $$\underset{\sim}{B} \subset B \times B ,$$

где $\underset{\sim}{A}$ представляет собой инциденции элементов A на A и $\underset{\sim}{B}$ — инциденции элементов B на B. Матрицей, которая задает воздействия первого и второго порядков, является

(6.10) $$\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B} ,$$

и скрытые воздействия будут получены после вычисления

(6.11) $$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{M}^* - \underset{\sim}{M} .$$

Рассмотрим простой числовой пример. Пусть

(6.12) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

и

(6.13) $B=\{b_1, b_2, b_3\}$.

На первой стадии эксперты определяют элементы матрицы

(6.14)

	b_1	b_2	b_3
a_1	.7	1	.2
a_2	0	.3	.4
a_3	.9	.2	0
a_4	.6	.7	0

Затем экспертов просят, чтобы они оценили инциденции элементов A на A и инциденции элементов B на B. В результате получим матрицы:

$$(6.15)\qquad \underset{\sim}{A} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(6.16)\qquad \underset{\sim}{B} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

По формуле (6.10) вычислим

$$(6.17)\qquad \underset{\sim}{M}^* = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} \circ$$

$$\circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline \end{array}$$

и далее

$$(6.18)\qquad \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{M}^* - \underset{\sim}{M} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .7 \\ \hline a_2 & .9 & .4 & .3 \\ \hline a_3 & 0 & .5 & .7 \\ \hline a_4 & .1 & 0 & .7 \\ \hline \end{array}$$

В матрице *D* проявляются воздействия второго порядка для (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_3).

Сейчас уместно сделать несколько замечаний.

Если требуется установить только инциденции элементов В на В, достаточно вычислить

(6.19) $\underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$.

Если же интересны только инциденции элементов А на А, достаточно вычислить

(6.20) $\underset{\sim}{M}'' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$.

В действительности $\underset{\sim}{M}^*$ выражает совместные воздействия от $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$; эти вторичные эффекты будем называть сопряженными воздействиями.

В частном случае, когда А = В и $\underset{\sim}{A}$ - квадратная рефлексивная матрица, получаем:

(6.21) $\underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^2$,

(6.22) $\underset{\sim}{M}'' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^2$.

Сопряженные воздействия должны применяться только один раз, поскольку далее уже будет вычисляться A^3.

7. Использование Ф-нечетких матриц

Элементы Ф-нечеткой матрицы инциденций оцениваются через доверительные интервалы $[a_1, a_2] \subseteq [0,1]$. Например, при исходных множествах А и В, задаваемых элементами из(2.1) и (2.2), Ф-нечеткая матрица А×В может иметь вид

(7.1)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .5]	.7	[0, .4]	1
a_2	0	[.8, 1]	.3	[.2, .5]
a_3	[.1, .2]	[.8, 1]	[.4, .5]	1
a_4	1	[0, 1]	[.3, .6]	.2
a_5	.7	.8	[.4, .6]	.5

где оценка а в виде числа понимается как интервал [а,а].

Операции min ($\wedge$) и max ($\vee$), используемые для нечетких значений, вводятся и для доверительных интервалов $[a_1, a_2] \subseteq [0,1]$ так, что

(7.2) $[m_1, m_2]\ (\wedge)\ [n_1, n_2] = [m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2]$,

(7.3) $[m_1, m_2]\ (\vee)\ [n_1, n_2] = [m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2]$.

Ниже мы введем также другие операции.

Преимущество Ф-нечеткого отношения по сравнению с нечетким отношением состоит в том, что для эксперта расширяется поле субъективности. При оценках экспертов может использоваться одиннадцатиуровневая система, задаваемая уровнями (4.3) или (4.4).Так,в случае использования (4.3) интервал

(7.4) [.2, .4] = [почти без инциденции, слабая инциденция].

Итак, при оценках элементов Ф-нечеткой матрицы в виде доверительных интервалов можно записать вместо (4.1)

(7.5) $\forall x_i, x_j \in \underset{\sim}{M} \quad v(x_i, x_j) \in [0, 1]$.

Отметим, что Ф-нечеткие матрицы помечаются специальной тильдой $\sim$ вместо тильды $\sim$, используемой для нечетких матриц.

Все, что делалось для нечетких матриц,можно перенести на случай Ф-нечетких матриц. Однако надо иметь в виду,что при нечеткости все оценки сравнимы между собой и образуют полный линейный порядок, потому что для любых нечетких оценок m и n

(7.6) $\qquad$ или $m > n$, или $m = n$, или $m < n$.

На любом множестве доверительных интервалов можно установить частичный порядок, потому что не все интервалы сравнимы между собой. Интервалы $[m_1, m_2]$ и $[n_1, n_2]$ сравнимы, т. е. $[m_1, m_2] \lesssim [n_1, n_2]$, если

(7.7) $\quad$ или $(m_1 < n_1,\ m_2 < n_2)$, или $(m_1 < n_1,\ m_2 = n_2)$, или $(m_1 = n_1,\ m_2 < n_2)$.

Поэтому

(7.8) $\qquad$ [0.3, 0.7] несравним с [0.2, 0.8].

Когда два доверительных интервала не сравнимы по правилам (7.7), можно ввести какой-либо другой критерий, основываясь на среднем из концов интервала. Выбор критерия зависит от поставленной задачи. Если Ф-нечеткая матрица такова, что

(7.9) $\qquad \underset{\sim}{M} \subset E \times E$,

т. е. определяется через отношение исходного множества E на себя, то всегда

(7.10) $\qquad \forall x_i \in E \quad v(x_i, x_i) = 1$.

Формула (4.9) композиции maxmin превращается в

(7.11) $\qquad v(a_i, c_k) = \underset{j}{(\vee)} \left(v(a_i, b_j)\ (\wedge)\ v(b_j, c_k)\right),$

где знаки $\wedge$ и $\vee$ в скобках указывают на то, что применяются операции (7.2) и (7.3). Композиция maxmin, определенная в (7.11), обладает интересным свойством, необходимым для доверительных интервалов: операции $(\wedge)$ и $(\vee)$ являются монотонными, т. е.

(7.12) $\qquad [m_1, m_2]\ (\wedge)\ [n_1, n_2] \begin{cases} \leq [m_1, m_2], \\ \leq [n_1, n_2], \end{cases}$

(7.13) $\qquad [m_1, m_2]\ (\vee)\ [n_1, n_2] \begin{cases} \geq [m_1, m_2], \\ \geq [n_1, n_2]. \end{cases}$

Кроме того, для любой Ф-нечеткой матрицы инциденций, главная диагональ которой образована единицами, имеем :

(7.14) $\qquad \underset{\sim}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{M}^2, \quad \underset{\sim}{M}^2 = \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}$;

это означает, что доверительные интервалы $\underset{\sim}{M}^2$ ближе к единице, чем интервалы, соответствующие матрице $\underset{\sim}{M}$, или совпадают с ней. Речь идет о включении интервалов на основании свойства монотонности. Это же выполняется и для прямоугольных матриц,определенных в § 6:

(7.15) $\qquad \underset{\sim}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{M}'$.

Поясним изложенное несколькими примерами. Пусть

(7.16) $\qquad E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

и матрица инциденций имеет вид

(7.17) $\underset{\sim}{M}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	[.3, .5]	.7	[.2, .3]
a_2	0	1	[.4, .7]	.5
a_3	[.8, 1]	[.7, 1]	1	[.4, .7]
a_4	.2	[0, .2]	[.1, .4]	1

По формуле (7.11) вычислим $\underset{\sim}{M}^2$. Так, при использовании первой строки и первого столбца матрицы $\underset{\sim}{M}$ получим:

$$([1, 1] (\wedge) [1, 1]) (\vee) ([0.3, 0.5] (\wedge) [0, 0]) (\vee)$$

(7.18) $$(\vee) ([0.7, 0.7] (\wedge) [0.8, 1]) (\vee) ([0.2, 0.3] (\wedge) [0.2, 0.2]) =$$

$$= [1, 1] (\vee) [0, 0] (\vee) [0.7, 0.7] (\vee) [0.2, 0.2] = [1, 1];$$

при использовании первой строки и второго столбца :

$$([1, 1] (\wedge) [0.3, 0.5]) (\vee) ([0.3, 0.5] (\wedge) [1, 1]) (\vee)$$

(7.19) $$(\vee) ([0.7, 0.7] (\wedge) [0.7, 1]) (\vee) ([0.2, 0.3] (\wedge) [0, 0.2]) =$$

$$= [0.3, 0.5] (\vee) [0.3, 0.5] (\vee) [0.7, 0.7] (\vee) [0, 0.2] = [0.7, 0.7];$$

при использовании первой строки и третьего столбца :

$$([1, 1] (\wedge) [0.7, 0.7]) (\vee) ([0.3, 0.5] (\wedge) [0.4, 0.7]) (\vee)$$

(7.20) $$(\vee) ([0.7, 0.7] (\wedge) [1, 1]) (\vee) ([0.2, 0.3] (\wedge) [0.1, 0.4]) =$$

$$= [0.7, 0.7] (\vee) [0.3, 0.5] (\vee) [0.7, 0.7] (\vee) [0.1, 0.3] = [0.7, 0.7] = 0.7$$

и т.д. В итоге имеем

(7.21) $\underset{\sim}{M}^2$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	.7	.7	[.4, .7]
a_2	[.4, .7]	1	[.4, .7]	[.5, .7]
a_3	[.8, 1]	[.7, 1]	1	[.5, .7]
a_4	[.2, .4	[.2, .4]	[.2, .4]	1

Сравнивая $\underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{M}^2$, убеждаемся, что

(7.22) $$\underset{\sim}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{M}^2 .$$

Сейчас можно рассчитать расстояние между каждым элементом из M и соответствующим ему элементом из M^2. Это расстояние вычислим как среднее отклонений между левыми и правыми концами интервалов. Так, для элемента (a_1,a_2)

(7.23) $d = ((0.7 - 0.3) + (0.7 - 0.5)) / 2 = 0.3$.

В итоге получим своеобразную матрицу расстояний

(7.24) $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^2}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	.3	0	.3
a_2	.55	0	0	.1
a_3	0	0	0	.05
a_4	.1	.2	.05	0

Из этой матрицы видно, что воздействием a_1 на a_2 нельзя пренебречь.

Рассмотрим далее пример с прямоугольной матрицей. Пусть A и B определены по (6.12), (6.13). Рассмотрим Ф-нечеткую матрицу

(7.25) $\underset{\sim}{M}$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	[.2, .5]	0	[.8, 1]
a_2	[.4, .5]	.7	1
a_3	0	[.3, .9]	[0, .2
a_4	.5	[.4, .6]	.8

при

(7.26) $\underset{\sim}{A}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	[0, .3]	[.8, 1]	1
a_2	[.4, .5]	1	.7	.7
a_3	[.2, .5]	1	1	[.8, 1]
a_4	[.3, .4	.5	1	1

(7.27) $\underset{\sim}{B}$ =

	b_1	b_2	b_3
b_1	1	[.2, .3]	.8
b_2	0	1	[.4, .7]
b_3	[.3, .8]	.6	1

Вычислим

(7.28) $\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}.$

Получим

(7.29) $\underset{\sim}{M}^*$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	[.5, .8]	[.6, .9]	[.8, 1]
a_2	[.5, .8]	.7	1
a_3	[.5, .8]	[.7, .9]	1
a_4	[.5, .8]	[.6, .9]	[.8, 1]

Для сравнения (7.25) и (7.29) найдем матрицу расстояний

(7.30) $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^*}$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	.3	.75	0
a_2	.2	0	0
a_3	.65	.2	.9
a_4	.15	.25	.1

Существует несколько интересных скрытых воздействий, таких как a_3 на b_3 при d=0.90, a_1 на b_2 при d=0.75, a_3 на b_1 при d=0.65. Остальными воздействиями при ненулевых расстояниях можно пренебречь.

8. Использование доверительных троек

Доверительная тройка определяется как разновидность интервальной оценки вида

(8.1) (m_1, m_2, m_3) , $m_1, m_2, m_3 \in [0, 1]$, $m_1 < m_2 < m_3$,

где m_1 - наименьшее значение; m_2 - максимально предполагаемое значение; m_3 - наибольшее значение.

Введение троек дает возможность большей свободы эксперту (или экспертам), который тремя значениями может точнее проверить свои предположения. Для троек определяются операции ($\wedge$) и ($\vee$) :

(8.2) $(m_1, m_2, m_3)\ (\wedge)\ (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3)$,

(8.3) $(m_1, m_2, m_3)\ (\vee)\ (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3)$.

Ниже приведен пример матрицы инциденций,оцениваемой доверительными тройками :

(8.4)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3,.5,.6)	(.1,.2,.3)	(.8,.9,1)	0
a_2	(.2,.2,.7)	(.7,.8,1)	0	1
a_3	.3	1	(.5,.5,.7)	.6
a_4	1	(0,.1,.1)	(.4,.5,.8)	(.9,.9,1)
a_5	(0,.2,.5)	0	(0,0,.2)	(.4,.6,.7)

с учетом того, что

(8.5) $(m, m, m) = m$.

Расстояние между двумя доверительными тройками

(8.6) (m_1, m_2, m_3) и (n_1, n_2, n_3)

определяется по формуле

(8.7) $d(m, n) = ((m_1 - n_1) + 2(m_2 - n_2) + (m_3 - n_3)) / 4$,

где предполагается,что $m_1 \geq n_1$, $m_2 \geq n_2$, $m_3 \geq n_3$. В противном случае в (8.7) необходимо брать абсолютные значения разностей. В формуле (8.7) вес 2 придается максимальному предполагаемому значению*. Для упражнения можно использовать примеры от (7.25) до (7.30), помещая в довери-

---

* Такое взвешивание оправдано, когда проводится аналогия с теорией треугольных нечетких чисел. Формула (8.7) даст в абсолютных значениях расстояние между двумя нечеткими треугольными числами.

тельные интервалы какие-либо максимально предполагаемые значения. Так же, как и для доверительных интервалов, априори можно сказать, что доверительные тройки образуют не полный, а частичный порядок. Когда тройки несравнимы, берется какой-либо другой критерий, например сравниваются их максимально предполагаемые значения.

9. Использование случайных нечетких матриц

При обработке мнений экспертов об инциденциях элементов одного множества на элементы другого множества можно прийти к случайной нечеткой матрице. Пусть имеется 10 экспертов, которым требуется оценить по одиннадцатиуровневой шкале (значениями 0,0.1,0.2,..., 0.9,1) инциденции элементов множества A

(9.1) $\quad A = \{a_1, a_2, a_3\}$

на элементы множества B

(9.2) $\quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Каждый эксперт дает свою матрицу инциденций :

$$\underset{\sim}{M}^{(1)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .3 & .5 & .9 & 0 \\ \hline a_2 & .6 & .3 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .5 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(2)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .7 & 1 & .1 \\ \hline a_2 & .5 & .4 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .5 & .3 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(3)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & .3 & .8 & .2 \\ \hline a_2 & .1 & .5 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & .9 & 0 & .7 & .3 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(4)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & .7 & .2 & .8 & .2 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(5)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & .8 & 1 & .1 \\ \hline a_2 & .4 & .1 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & .3 & .9 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(6)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .8 & .9 & 0 \\ \hline a_2 & .8 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(7)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .6 & .4 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & .5 & .3 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .2 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(8)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .8 & .2 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & .6 & .4 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .4 & .1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(9)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .9 & .5 & .8 & .3 \\ \hline a_2 & .2 & .7 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & .9 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(10)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 0 & .5 & .7 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & .8 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .8 & .8 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Исходя из этой информации, устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α для каждой пары (a_i, b_j), где i=1,2,3; j=1,2,3,4. Для нашего примера эти данные приведены в табл. 9.1. Эта статистика в расчете на количество экспертов задает частоту встречаемости каждого уровня для каждой пары, и эту частоту можно считать элементарной вероятностью свершения случайного события α, $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$. Далее по элементарным вероятностям строится так называемая накопленная вероятность, т. е. для каждой пары (a_i, b_j), где i=1,2,3; j=1,2,3,4, последовательно суммируются значения вероятностей $p(\alpha=1)$, $p(\alpha=0.9)$, ..., $p(\alpha=0.1)$, $p(\alpha=0)$. Получается табл. 9.2. Для каждого уровня α из этой таблицы можно выписать случайную нечеткую матрицу инциденций элементов множества A на элементы множества B. Все операции, которые осуществлялись ранее с нечеткими отношениями, могут осуществляться со случайными нечеткими отношениями для каждого уровня α, $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$. Понятно, что количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений. Всегда можно взять такое количество экспертов и уровней, которое будет сочтено целесообразным.

Таблица 9.1

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1		5
	.1				2
	.2	2	1		2
	.3	1	1		1
	.4		1		
a_1	.5	2	3		
	.6	1			
	.7		1	1	
	.8	1	2	2	
	.9	1		2	
	1	1		5	
	0	2			3
	.1	1	1		2
	.2	1	1		4
	.3		3		1
	.4	1	2		
a_2	.5	2	1		
	.6	2			
	.7		1		
	.8	1	1		
	.9				
	1			10	
	0		6		4
	.1				1
	.2		1	1	3
	.3		1	1	2
	.4	1		1	
a_3	.5		1	2	
	.6				
	.7	1		1	
	.8	1	1	1	
	.9	1		2	
	1	6		1	

Таблица 9.2

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1	1	1
	.1	.9	.9	1	.5
	.2	.9	.9	1	.3
	.3	.7	.8	1	.1
	.4	.6	.7	1	0
a_1	.5	.6	.6	1	0
	.6	.4	.3	1	0
	.7	.3	.3	1	0
	.8	.3	.2	.9	0
	.9	.2	0	.7	0
	1	.1	0	.5	0
	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	.7
	.2	.7	.9	1	.5
	.3	.6	.8	1	.1
	.4	.6	.5	1	0
a_2	.5	.5	.3	1	0
	.6	.3	.2	1	0
	.7	.1	.2	1	0
	.8	.1	.1	1	0
	.9	0	0	1	0
	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1
	.1	1	.4	1	.6
	.2	1	.4	1	.5
	.3	1	.3	.9	.2
	.4	1	.2	.8	0
a_3	.5	.9	.2	.7	0
	.6	.9	.1	.5	0
	.7	.9	.1	.5	0
	.8	.8	.1	.4	0
	.9	.7	0	.3	0
	1	.6	0	.1	0

Композиция maxmin, введеная ранее, используется здесь таким же образом, но для каждого уровня отдельно, начиная, например, с уровня α=1 и заканчивая уровнем α=0. На практике полезно сохранить одиннадцатиуровневую систему, поскольку это количество уровней оказывается достаточным для изучения скрытых воздействий.

Приведем теперь пример анализа случайных нечетких квадратных матриц, оставляя более общий случай с прямоугольными матрицами для дальнейшего рассмотрения (см. § 11).

Т а б л и ц а 9.3

$\underset{\sim}{R}$ =

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	1
	.3	1	0	1
	.4	1	0	.8
	.5	1	0	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Т а б л и ц а 9.4

$\underset{\sim}{R}^2$=

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	1	.5	.8
	.5	1	.2	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Пусть задано множество

(9.3) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

и 10 экспертов оценили инциденции элементов A на A в виде таблицы $\underset{\sim}{R}$ (табл. 9.3) накопленных вероятностей, из которой для каждого уровня выписываются случайные нечеткие матрицы инциденций (знак $\sim$ обозначает случайность нечетких отношений). По этим матрицам уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 9.4) :

уровень 1: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.9: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.8: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.7: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .1 & 1 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.6: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .4 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.5: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .2 & .7 \\ .5 & 1 & .9 \\ .2 & .2 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.4: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .5 & .8 \\ .6 & 1 & .9 \\ .5 & .5 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.3: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.2: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

уровень 0.1: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Для уровня 0 все элементы матрицы равны 1.

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для $\underset{\sim}{R}$, так и для $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 9.5, 9.6).

Таблица 9.5

		a_1	a_2	a_3
	0	0	1	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	.2
	.4	0	0	.1
a_1	.5	0	0	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
	0	0	0	.1
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	0
	.4	.1	0	0
a_2	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
a_3	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

Таблица 9.6

		a_1	a_2	a_3
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	0	.3	.2
	.4	0	.3	.1
a_1	.5	0	.2	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	.1
	.4	.1	0	0
a_2	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
a_3	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

По элементарным вероятностям соответственно из табл. 9.5 и 9.6 можно вычислить математическое ожидание оценки инциденции каждого элемента $a_i \in A$ на каждый элемент $a_j \in A$. Для этого при фиксированных i и j находится сумма всех попарных произведений значений уровня и его вероятности. Так, в нашем примере на основе табл. 9.5 для пары (a_1, a_3) математическое ожидание будет $\varepsilon(a_1, a_3) = 0.3 * 0.2 + 0.4 * 0.1 + 0.5 * 0.7 = 0.45$.

В результате получим следующие матрицы математических ожиданий:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .57 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .35 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .60 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \end{array}$$

Сравнение этих матриц дает возможность выявить скрытые (косвенные) воздействия второго порядка. Так, подобное воздействие проявляется, хотя и не очень интенсивно, для пары (a_1, a_2).

Маловероятно, что при использовании изложенного метода найдутся скрытые воздействия с отклонениями, близкими к единице. Это может произойти только при существенных отклонениях в мнениях экспертов или в случае примеров с большим количеством влияющих друг на друга факторов.

10. Использование экспертонов

Предположим, что каждый эксперт, вместо того чтобы, как это делалось в предыдущем параграфе, выразить свое мнение с помощью одного числа из интервала [0,1], производит оценку в виде доверительного интервала из [0,1]. Это дает экспертам большую свободу выражения субъективных мнений.

Пусть снова требуется, чтобы 10 экспертов оценили по одиннадцатиуровневой шкале инциденции элементов (9.1) множества A на элементы (9.2) множества B через доверительные интервалы. Например, это могут быть следующие оценки:

$M^{(1)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .7]	[.4, .5]	[.6, .7]	.3
a_2	[.2, .3]	[.8, 1]	.8	0
a_3	1	[0, .3]	[0, .5]	[.6, .8]

$M^{(2)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .6]	0	.3	[.1, .2]
a_2	[.2, .5]	[.1, .2]	.9	0
a_3	[.3, .4]	0	[0, .5]	[.9, 1]

$M^{(3)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.4, 1]	1	[0, .2]	.2
a_2	[.5, .6]	[.9, 1]	1	[.2, .4]
a_3	1	[.4, .5]	[0, .2]	[.7, .8]

$M^{(4)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.5, .7]	.3	[.1, .3]	[0, .2]
a_2	1	[.1, .2]	[.8, 1]	0
a_3	[.1, .4]	0	.3	1

$M^{(5)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[0, .1]	[.5, .6]	0	[.1, .2]
a_2	[.4, 1]	1	[.7, .9]	0
a_3	1	0	[0, .2]	1

$M^{(6)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.5	0	0	[.2, .3]
a_2	1	1	1	[0, .2]
a_3	0	[.1, .2]	0	[.6, 1]

$M^{(7)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	.6	.4	[.2, .4]
a_2	[.6, 1]	[.8, 1]	[.8, 1]	[.1, .3]
a_3	[.7, .9]	0	[.1, .3]	[.9, 1]

$M^{(8)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.4, .5]	0	[0, .3]	.5
a_2	[.7, 1]	[.9, 1]	.8	0
a_3	0	0	[.1, .3]	[.5, .8]

$M^{(9)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	[.3, .5]	[0, .1]	0
a_2	[.3, 1]	[.8, 1]	[.8, .9]	.1
a_3	1	.1	[.2, .3]	[.7, .8]

$M^{(10)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.8	[0, .2]	[.1, .2]	[.6, .7]
a_2	1	1	[.8, .9]	0
a_3	[.2, .3]	0	.5	1

На основании этой информации устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α среди левых и правых концов доверительных интервалов (табл. 10.1).

Т а б л и ц а 10.1

		b_1		b_2		b_3		b_4	
	0	1		4	3	5	2	2	1
	.1		1			2	1	2	
	.2	2			1		2	3	4
	.3	2	2	2	1	1	3	1	2
	.4	2		1		1	1		1
	.5	2	2	1	2			1	1
	.6		1	1	2	1		1	
	.7		2				1		1
	.8	1	1						
	.9								
	1		1	1	1				
	0							7	6
	.1			2				2	1
	.2	2			2			1	1
	.3	1	1						1
	.4	1							1
a_2	.5	1	1						
	.6	1	1						
	.7	1				1			
	.8			3		6	2		
	.9			2		1	4		
	1	3	7	3	8	2	4		
	0	2	2	7	6	5	1		
	.1	1		2	1	2			
	.2	1			1	1	2		
	.3	1	1		1	1	4		
	.4		2	1					
a_3	.5				1	1	3	1	
	.6							2	
	.7	1						2	
	.8								4
	.9		1					2	
	1	4	4					3	6

Т а б л и ц а 10.2

$\underset{\sim}{R} =$

		b_1		b_2		b_3		b_4	
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.9	1	.6	.7	.5	.8	.8	.9
	.2	.9	.9	.6	.7	.3	.7	.6	.9
	.3	.7	.9	.6	.6	.3	.5	.3	.5
	.4	.5	.7	.4	.5	.2	.2	.2	.3
a_1	.5	.3	.7	.3	.5	.1	.1	.2	.2
	.6	.1	.5	.2	.3	.1	.1	.1	.1
	.7	.1	.4	.1	.1	0	.1	0	.1
	.8	.1	.2	.1	.1	0	0	0	0
	.9	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
	1	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	.3	.4
	.2	1	1	.8	1	1	1	.1	.3
	.3	.8	1	.8	.8	1	1	0	.2
	.4	.7	.9	.8	.8	1	1	0	.1
	.5	.6	.9	.8	.8	1	1	0	0
a_2	.6	.5	.8	.8	.8	1	1	0	0
	.7	.4	.7	.8	.8	1	1	0	0
	.8	.3	.7	.8	.8	.9	1	0	0
	.9	.3	.7	.5	.8	.3	.8	0	0
	1	.3	.7	.3	.8	.2	.4	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.8	.8	.3	.4	.5	.9	1	1
	.2	.7	.8	.1	.3	.3	.9	1	1
	.3	.6	.8	.1	.2	.2	.7	1	1
	.4	.5	.7	.1	.1	.1	.3	1	1
a_3	.5	.5	.5	0	.1	.1	.3	1	1
	.6	.5	.5	0	0	0	0	.9	1
	.7	.5	.5	0	0	0	0	.7	1
	.8	.4	.5	0	0	0	0	.5	1
	.9	.4	.5	0	0	0	0	.5	.6
	1	.4	.4	0	0	0	0	.3	.6

По данным из табл. 10.1 очевидным образом находятся соответствующие элементарные вероятности, по которым так же, как и ранее, находятся накопленные вероятности для каждой пары (a_i,b_j), где i=1,2,3; j=1,2,3,4, и для обоих концов доверительных интервалов (табл. 10.2)

Конструкции, подобные табл. 10.2, как обобщение случайных нечетких матриц через доверительные интервалы названы нами экспертонами. Из табл. 10.2 для каждого уровня α выписываются матрицы инциденций. Все операции, введенные для обычных матриц инциденций, нечетких, Ф-нечетких, случайных нечетких инциденций могут также осуществляться и с матрицами инциденций по экспертонам. Понятно, что для последних расчеты становятся более длительными (увеличиваются в 22 раза при экспертонах по сравнению с нечеткими матрицами), однако при современном уровне компьютеризации это не может быть сдерживающим фактором. Снова количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений.

Вернемся к мини-примеру с множеством A из (9.3) и используем экспертоны. Предполагается, что сотрудничество 10 экспертов привело к оценкам инциденций, заданным в виде экспертона $\underset{\sim}{R}$ (табл. 10.3).

Т а б л и ц а 10.3

$\underset{\sim}{R} =$

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.2
	.3	1	1	0
	.4	1	1	0
	.5	1	1	0
	.6	1	.9	0
	.7	1	.6 .8	0
	.8	1	.6 .8	0
	.9	1	.3	0
	1	1	.1	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.6 .7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	.6 .7	1
	.3	1	.3 .4	1
	.4	.9 1	.3	1
	.5	.9 1	0	1
	.6	.9	0	1
	.7	.9	0	1
	.8	.8	0	1
	.9	.7 .8	0	1
	1	.5 .6	0	1

По этой информации уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие экспертон $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 10.4):

$$\alpha=1: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & .1 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & .1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.9: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & .3 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & .3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.8: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & .6 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & .6\ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.7: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .6 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & .6\ .7 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .7 \\ \hline .9 & .6\ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.6: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & .7 \\ \hline .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.5: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .9\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.4: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .9\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.3: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ .4 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ .4 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.2: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ .7 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ .7 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.1:\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & .9\ 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Для $\alpha=0$ все элементы матрицы равны 1.

Т а б л и ц а 10.4

$\underset{\sim}{R}^2 =$

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	1	1	.7 .8
	.5	1	1	.7 .8
	.6	1	.9	.7
	.7	1	.6 .8	.6 .7
	.8	1	.6 .8	.6
	.9	1	.3	.3
	1	1	.1	.1
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	1
	.5	.9 1	.9 1	1
	.6	.9	.9	1
	.7	.9	.6 .8	1
	.8	.8	.6 .8	1
	.9	.7 .8	.3	1
	1	.5 .6	.1	1

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для $\underset{\sim}{R}$, так и для $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 10.5, 10.6).

Таблица 10.5

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			.7 .8
	.2			.2
	.3			
	.4			
a_1	.5		.1	
	.6		.3 .1	
	.7			
	.8		.3 .5	
	.9		.2	
	1	1	.1	
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	.1 .1		0 .1
	.6			.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1		.4 .3	
	.2		.3 .3	
	.3	.1 0	0 .1	
	.4		.3	
a_3	.5	0 .1		
	.6			
	.7	.1 .1		
	.8	.1 0		
	.9	.2 .2		
	1	.5 .6		1

Таблица 10.6

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2			
	.3			.2 .1
	.4			
a_1	.5		.1 .1	0 .1
	.6		.3 .1	.1 0
	.7			0 .1
	.8		.3 .5	.3
	.9		.2	.2
	1	1	.1	.1
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	0 .1		0 .1
	.6	.1 0		.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1			
	.2			
	.3	.1 0	.1 0	
	.4			
a_3	.5	0 .1	0 .1	
	.6		.3 .1	
	.7	.1 .1	.	
	.8	.1 0	.3 .5	
	.9	.2 .2	.2	
	1	.5 .6	.1	1

По данным из табл. 10.5 и 10.6 вычислим соответственно матрицы математических ожиданий оценок инциденций по концам доверительных интервалов:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .75,\ .79 & .11,\ .11 \\ \hline a_2 & .75,\ .80 & 1 & .69,\ .74 \\ \hline a_3 & .86,\ .90 & .22,\ .24 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .75,\ .79 & .64,\ .68 \\ \hline a_2 & .76,\ .80 & 1 & .69,\ .74 \\ \hline a_3 & .86,\ .90 & .73,\ .79 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Возьмем теперь средние в доверительных интервалах:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .770 & .115 \\ \hline a_2 & .775 & 1 & .715 \\ \hline a_3 & .880 & .230 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .770 & .660 \\ \hline a_2 & .780 & 1 & .715 \\ \hline a_3 & .880 & .760 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Сравнение этих матриц позволяет выявить скрытые воздействия второго порядка. Наиболее существенно они проявляются для пар (a_1,a_3) и (a_3,a_2).

Можно уточнить мнения экспертов, вводя дополнительно к доверительным интервалам еще одну оценку - максимально предполагаемое значение. Таким образом, получаются специфические интервальные оценки - доверительные тройки:

$$(a_1, a_2, a_3)\ , \quad a_1, a_2,\ a_3 \in [0, 1]\ ,\ a_1 \leq a_2 \leq a_3\ ,$$

и, как отмечалось в § 8, операции с ними такие же, как для доверительных интервалов (например, с использованием формул (8.2) и (8.3)).

Читатели, знакомые с теорией нечетких чисел и, в частности, с теорией нечетких треугольных чисел не должны смешивать доверительную тройку с нечетким треугольным числом. Последнее представляет собой две линейные функции принадлежности от a_1 до a_2 и от a_2 до a_3. Для концов интервала функция принадлежности равна 0, а для максимально предполагаемого значения - 1. Операции ($\wedge$) и ($\vee$), осуществляемые с нечеткими числами, здесь уже проводятся над нечеткими числами, не являющимися в общем случае треугольными. Для доверительных троек они приводят к доверительным тройкам (без использования функций принадлежности). Однако и для доверительной тройки, так же как и для нечеткого треугольного числа, репрезентативное число определяется по формуле

$$\bar{a} = (a_1 + 2a_2 + a_3)\ /\ 4\ .$$

В формуле используется удвоение максимально предполагаемого значения по сравнению с концами интервала. Необходимость этого доказывается для нечетких треугольных чисел, и такой подход кажется наиболее удачным для доверительных троек.

Если, например, матрица инциденций одного эксперта имеет вид

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3, .7, 1)	(.2, .3, .3)	(.5, .6, .8)	.8
a_2	1	(0, 0, .2)	(.4, .5, .7)	0
a_3	(.1, .2, .4)	.4	(.2, .2, .3)	(.6, .7, .8)

то экспертон с доверительными тройками может иметь вид, заданный табл. 10.7.

Т а б л и ц а 10.7

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1	1	1
	.1	1	1	.8 .9 1	1
	.2	1	1	.8 .9 1	.4 .5 .7
	.3	.8 .9 1	1	.8 .8 .9	.2 .3 .3
	.4	.8 .8 1	1	.8	0 .1 .1
a_1	.5	.8	1	.7 .7 .8	0
	.6	.6 .7 .7	1	.7 .7 .8	0
	.7	.4 .4 .5	1	.7 .7 .8	0
	.8	.4	1	.7	0
	.9	0 .1 .2	1	.5 .6 .7	0
	1	0	1	.2 .4 .6	0
	0	1	1	1	1
	.1	0	.9	1	1
	.2	0	.9	1	1
	.3	0	.7 .8 .9	.9 .9 1	1
	.4	0	.7 .7 .8	.8 .9 1	.5 .6 .7
a_2	.5	0	.6 .7 .7	.8 .9 1	.5 .6 .6
	.6	0	.5	.8 .9 1	.5 .5 .6
	.7	0	.4 .5 .5	.4 .8 .8	.5
	.8	0	.2	.3	.4 .4 .5
	.9	0	.1	.2 .3 .3	.4
	1	0	0	.1	.4
	0	1	1	1	1
	.1	1	0	.9 1 1	1
	.2	.5 .7 .8	0	.9 1 1	1
	.3	.3 .5 .5	0	.9 .9 1	.9 1 1
	.4	.1 .2 .2	0	.9	.9 .9 1
a_3	.5	0	0	.8 .9 .9	.9
	.6	0	0	.8	.8 .8 .9
	.7	0	0	.8	.7 .8 .9
	.8	0	0	.8	.6 .7 .7
	.9	0	0	.7 .8 .8	.6
	1	0	0	.6	.6

Операции над экспертонами с доверительными тройками осуществляются так же, как и с доверительными интервалами или с Ф-нечеткими матрицами.

Далее можно было бы рассмотреть еще одно обобщение интервальных оценок в виде доверительных четверок (a_1, a_2, a_3, a_4), где a_1, a_4 - концы доверительного интервала; $[a_2, a_3]$ - доверительный интервал для максимально предполагаемого значения при $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$.

Операции $(\wedge)$ и $(\vee)$ зададим по формулам :

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\wedge)\ (n_1, n_2, n_3, n_4) = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4),$$

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\vee)\ (n_1, n_2, n_3, n_4) = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4).$$

При таком подходе не следует смешивать доверительные четверки с нечеткими трапециевидными числами.

Репрезентативное число для доверительной четверки вычисляется как

$$\hat{a} = (a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \ / \ 6 .$$

Дальнейший анализ с доверительными четверками осуществляется так же, как и с доверительными тройками.

11. Промежуточные причины скрытых воздействий

Для примера, приведенного в § 5, рассмотрим более подробно способы учета инциденций с переходом на случайные нечеткие матрицы и матрицы по экспертонам. Опишем схему влияния фактора 9 на фактор 12 через все другие факторы.

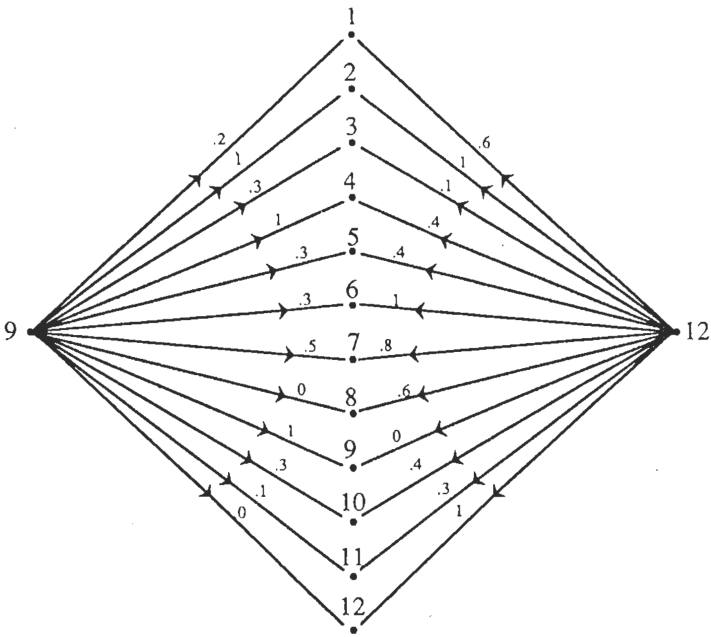


Рис. 11.1

Из рис. 11.1 видно, что максимум из минимумов двух следующих друг за другом инциденций достигается на пути 9 ⟶ 2 ⟶ 12 , и он равен $1 \wedge 1 = 1$. Другие пути дают значения, меньшие или равные 0,5. Так, для пути 9 ⟶ 7 ⟶ 12 получаем $0{,}5 \wedge 0{,}8 = 0.5$. Итак, инциденция второго порядка для окружающей среды на оборону проявляется через население. В конечном счете окружающая среда оказывает существенное воздействие на оборону. Для того чтобы оборона была сильной, необходимо, чтобы население хотело защищать свою окружающую среду, свою родину, свои нравы и обычаи, исторические памятники и традиции. Для быстрого получения этого результата полезно расположить друг за другом 9-ю строку и 12-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.6	1	.1	.4	.4	1	.8	.6	0	.4	.3	1

Очевидно, что композиция maxmin соответствует фактору 2. Повторим этот же процесс для факторов 8 и 2.

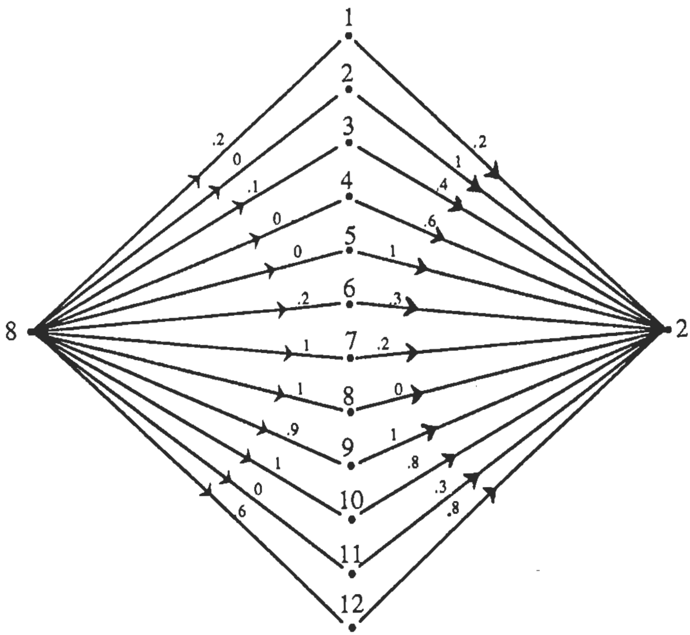


Рис. 11.2

· Из рис.11.2 видно, что максимум из минимумов двух последовательных инциденций достигается на пути 8 ⟶ 9 ⟶ 2, и он равен $0.9 \wedge 1.0=1$. Другие пути дают значения, не превосходящие 0.8. Именно для пути 8 ⟶ 10 ⟶ 2 получаем $1 \wedge 0.8=0.8$. Таким образом, видно, что наиболее важной причиной второго порядка влияния энергетики на население является окружающая среда: речь идет об известном влиянии промышленного загрязнения, однако оно не было отмечено непосредственно. Как и выше, для получения этого результата полезно было бы расположить друг за другом 8-ю строку и 2-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.4	.6	1	.3	.2	0	1	.8	.3	.8

Композиция maxmin в этом случае соответствует фактору 10. Однако нельзя исключать и фактор 10. Энергетика является абсолютно необходимой для транспорта, а транспорт имеет большую инциденцию на население. В качестве упражнений предлагаем читателю определить скрытые воздействия второго порядка для всевозможных остальных пар факторов, заданных в табл. 5.1.

Рассмотрим сейчас, как оперировать прямоугольными матрицами инциденций. Для этого вернемся к примеру из § 6. С помощью (6.18) было отмечено наличие скрытого воздействия a_2 на b_1. Воспроизведем эти инциденции, начиная из a_2, для того, чтобы перейти к b_1, на основе композиции матриц $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, приведшей к $\underset{\sim}{M}^*$. Схематично это можно представить в виде графа, изображенного на рис. 11.3.

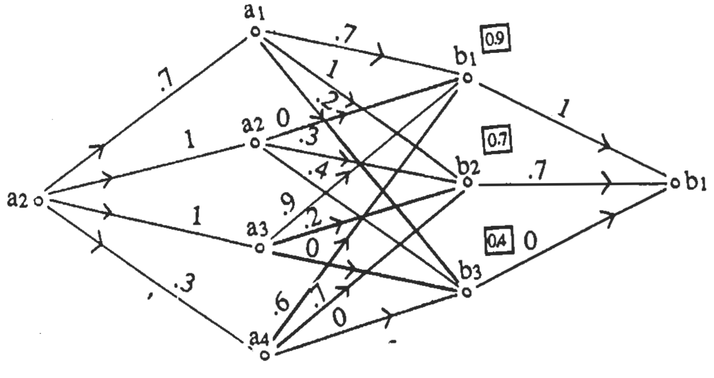


Рис. 11.3

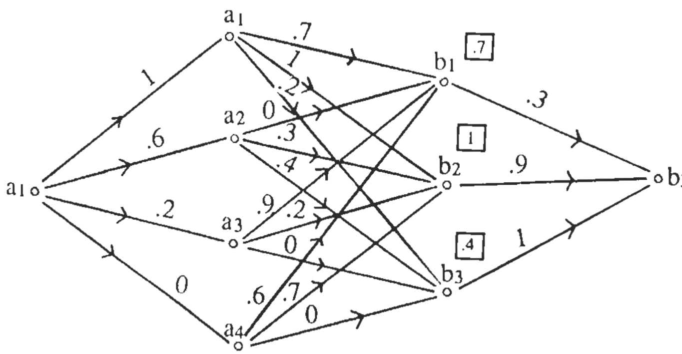
Из рис.11.3 видно, что вершина b_1 из a_2 достижима различными путями, каждый из которых содержит ровно три дуги. Поэтому вначале вычисляется композиция maxmin, соответствующая путям с двумя дугами до вершин b_1, b_2, b_3 (как элемент $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$), а потом композиция maxmin до конечной вершины b_1 (как элемент $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$). Таким образом, на первом шаге получим :

на пути к b_1 $0.7 \wedge 0.7 = 0.7$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 0.9 = 0.9$, $0.3 \wedge 0.6 = 0.3$ и максимум равен 0.9,

на пути к b_2 $0.7 \wedge 1 = 0.7$, $1 \wedge 0.3 = 0.3$, $1 \wedge 0.2 = 0.2$, $0.3 \wedge 0.7 = 0.3$ и максимум равен 0,7,

на пути к b_3 $0.7 \wedge 0.2 = 0.2$, $1 \wedge 0.4 = 0.4$, $1 \wedge 0 = 0$, $0.3 \wedge 0 = 0$ и максимум равен 0.4.

Далее, на втором шаге вычисляем $0.9 \wedge 1 = 0.9$, $0.7 \wedge 0.7 = 0.7$, $0.4 \wedge 0 = 0$ с максимумом, равным 0.9. По этому значению обратным ходом (как в динамическом программировании) восстанавливается путь $a_2 \to a_3 \to b_1 \to b_1$ на графе, изображенном на рис.11.3. Отметим, что используемый способ может быть распространен также на инциденции третьего порядка, четвертого порядка и т. д. По (6.18) было найдено и скрытое воздействие a_1 на b_3. Снова воспроизведем эти инциденции на основе матриц $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$ в виде графа, приведенного на рис.11.4 .



Р и с. 11.4

Детальные вычисления, аналогичные только что проведенным, восстанавливают путь $a_1 \to a_1 \to b_2 \to b_3$, которому соответствует максимум $1 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$.

Таким образом, проявляется наиболее существенное косвенное воздействие a_1 на b_3 через b_2. Все изложенное здесь на графах может быть объяснено и на матрицах. Так, для примера с рис. 11.4 можно использовать следующие матричные операции:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\hline
a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\
\hline
a_2 & 0 & .3 & .4 \\
\hline
a_3 & .9 & .2 & 0 \\
\hline
a_4 & .6 & .7 & 0 \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .7 & 1 & .4 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|}
 & b_3 \\
\hline
b_1 & .3 \\
\hline
b_2 & .9 \\
\hline
b_3 & 1 \\
\hline
\end{array}
= 0.9
$$

Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь, на котором проявляется наиболее существенное косвенное воздействие. Понятно, что в общем случае может быть несколько путей, соответствующих одному и тому же максимуму. Существуют эффективные комбинаторные методы для нахождения всех этих путей.

Предположим сейчас, что анализируемые матрицы являются Ф-нечеткими. Предполагаемый метод в своей основе остается тем же, но, поскольку доверительные интервалы образуют частичный, а не полный порядок, проблема несколько усложняется. Матрица расстояний (типа (7.30)) укажет наличие скрытых воздействий. Восстановление факторов, через которые проявляется такое воздействие, проводится по схеме, обратной ходу вычислений. Действительно, если вернуться к рассмотрению (7.25) — (7.29) в поисках пути для скрытых воздействий a_3 на b_3, то получим :

$$\begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & [.2, .5] & 1 & 1 & [.8, 1] \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & [.2, .5] & 0 & [.8, 1] \\ a_2 & [.4, .5] & .7 & 1 \\ a_3 & 0 & [.3, .9] & [0, .2] \\ a_4 & .5 & [.4, .6] & .8 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .8 \\ b_2 & [.4, .7] \\ b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 1$$

Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь $a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$. Кстати, на этот путь не влияет никакой доверительный интервал. Если же такое влияние имеется, то следует искать путь для левых и правых концов этих интервалов и делать необходимые выводы. Рассмотрим, например, скрытое воздействие a_1 на b_2, которое по (7.30) было оценено в 0.75. Для левых концов интервалов получим :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .2 & 0 & .8 \\ \hline a_2 & .4 & .7 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & .3 & 0 \\ \hline a_4 & .5 & .4 & .8 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .4 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .4 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .2 \\ \hline b_2 & 1 \\ \hline b_3 & .6 \\ \hline \end{array} = 0.6$$

По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \to a_1 \to b_3 \to b_2$, соответствующий оценке 0.6. Для правых концов интервалов получим :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & .3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .5 & .7 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & .9 & .2 \\ \hline a_4 & .5 & .6 & .8 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .9 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & .3 \\ \hline b_2 & 1 \\ \hline b_3 & .6 \\ \hline \end{array} = 0.9$$

По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \to a_3 \to b_2 \to b_2$, соответствующий оценке 0.9. Не следует удивляться, что получены разные пути для левых и правых концов интервалов, поскольку в этом случае отношения причины и следствия нечетки. Основное промежуточное воздействие задается правыми концами.

Ситуация осложняется при наличии нескольких путей для левых и (или) правых концов интервалов; в этом случае целесообразно ограничиться путями для правых концов. Единственный путь также получается при осуществлении расчетов на основе средних в доверительных интервалах, образующих Ф-нечеткие матрицы $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$.

Для доверительных троек анализ может проводиться так же, как и для доверительных интервалов. В этом случае можно проводить расчеты по правым и левым концам доверительных интервалов, а также по значениям максимума предполагаемого значения.

Возвратимся сейчас к случайным нечетким матрицам. Пусть $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2.b_3\}$ и по схеме, изложенной в § 9, с помощью 10 экспертов найдены следующие элементарные и накопленные вероятности при оценке инциденций множества A на A, множества A на B и множества B на B (табл. 11.1—11.6).

Таблица 11.1

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	.2	0
	0	0	.3	0
	0	0	.3	.5
	0	0	.1	0
	0	0	.1	.2
	0	0	0	.3
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	1	1	0	0
a_2	1	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	.2
	0	0	0	.4
	0	0	.1	.2
	0	0	.1	.1
	0	0	.1	0
	0	0	.1	0
	0	0	.1	.1
	0	0	.3	0
	0	1	.2	0
a_3	.2	0	0	0
	.4	0	0	0
	.1	0	0	0
	.1	.2	0	0
	0	.2	0	0
	0	0	0	0
	.2	.3	0	0
	0	.1	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	.2	1	1
a_4	0	1	0	0
	0	0	.4	0
	0	0	.3	0
	.2	0	.2	0
	0	0	.1	0
	.1	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.5	0	0	1

Т а б л и ц а 11.2

$\underset{\sim}{A} =$

		a_1	a_2	a_3	a_4
	0	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1
	.3	1	1	.8	1
	.4	1	1	.5	1
a_1	.5	1	1	.2	.5
	.6	1	1	.1	.5
	.7	1	1	0	.3
	.8	1	1	0	0
	.9	1	1	0	0
	1	1	1	0	0
	0	1	1	1	1
	.1	0	1	1	1
	.2	0	1	1	1
	.3	0	1	1	.8
	.4	0	1	1	.4
a_2	.5	0	1	.9	.2
	.6	0	1	.8	.1
	.7	0	1	.7	.1
	.8	0	1	.6	.1
	.9	0	1	.5	0
	1	0	1	.2	0
	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	1
	.2	.4	1	1	1
	.3	.3	1	1	1
	.4	.2	.8	1	1
a_3	.5	.2	.6	1	1
	.6	.2	.6	1	1
	.7	0	.3	1	1
	.8	0	.2	1	1
	.9	0	.2	1	1
	1	0	.2	1	1
	0	1	1	1	1
	.1	1	0	1	1
	.2	1	0	.6	1
	.3	1	0	.3	1
	.4	.8	0	.1	1
a_4	.5	.8	0	0	1
	.6	.7	0	0	1
	.7	.6	0	0	1
	.8	.6	0	0	1
	.9	.5	0	0	1
	1	.5	0	0	1

Таблица 11.3

		b_1	b_2	b_3
	0	0	1	0
	.1	0	0	0
	.2	.2	0	0
	.3	0	0	0
a_1	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	.1
	.6	.2	0	0
	.7	.1	0	.2
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	0	.4
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	.7	0	0
	.3	.1	0	0
a_2	.4	.1	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.3	0
	.8	0	.3	0
	.9	0	.2	.9
	1	0	0	.1
	0	0	0	1
	.1	.7	0	0
	.2	.1	0	0
	.3	.2	0	0
a_3	.4	0	0	0
	.5	0	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.4	0
	.8	0	.3	0
	.9	0	0	0
	1	0	.1	0
	0	.1	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
a_4	.4	.5	.2	.2
	.5	0	.3	0
	.6	.1	.3	.1
	.7	0	.1	0
	.8	.1	.1	0
	.9	0	0	0
	1	.2	0	.7

Таблица 11.4

$\underset{\sim}{M} =$

		b_1	b_2	b_3
	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	1
	.3	.8	0	1
a_1	.4	.8	0	1
	.5	.4	0	1
	.6	.3	0	.9
	.7	.1	0	.9
	.8	0	0	.7
	.9	0	0	.4
	1	0	0	.4
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	.3	1	1
a_2	.4	.2	1	1
	.5	.1	1	1
	.6	0	1	1
	.7	0	.8	1
	.8	0	.5	1
	.9	0	.2	1
	1	0	0	.1
	0	1	1	1
	.1	1	1	0
	.2	.3	1	0
	.3	.2	1	0
a_3	.4	0	1	0
	.5	0	1	0
	.6	0	1	0
	.7	0	.8	0
	.8	0	.4	0
	.9	0	.1	0
	1	0	.1	0
	0	1	1	1
	.1	.9	1	1
	.2	.9	1	1
	.3	.9	1	1
a_4	.4	.9	1	1
	.5	.4	.8	.8
	.6	.4	.5	.8
	.7	.3	.2	.7
	.8	.3	.1	.7
	.9	.2	0	.7
	1	.2	0	.7

Т а б л и ц а 11.5

		b_1	b_2	b_3
b_1	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	.7
	.3	0	0	.1
	.4	0	.2	.2
	.5	0	.1	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	.2
	.4	0	0	.2
	.5	0	0	0
	.6	0	0	.2
	.7	0	0	.1
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	1	.3
b_3	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	.2	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.2	0
	1	.3	.1	1

Т а б л и ц а 11.6

$\underset{\sim}{B} =$

		b_1	b_2	b_3
b_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	.3
	.4	1	1	.2
	.5	1	.8	0
	.6	1	.7	0
	.7	1	.7	0
	.8	1	.5	0
	.9	1	.5	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	1	1
	.1	0	1	1
	.2	0	1	1
	.3	0	1	1
	.4	0	1	.8
	.5	0	1	.6
	.6	0	1	.6
	.7	0	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	.3
	1	0	1	.3
b_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	.8	1
	.5	.6	.8	1
	.6	.5	.8	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1

Определим теперь $\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. Для этого для каждого уровня ($\alpha = 1, 0.9, 0.8, \ldots, 0.1, 0$) вычислим $\tilde{M}^*$:

$$\underset{\sim}{M}^*_1 = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .2 & 0 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .3 & .1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & .1 & 1 \\ a_2 & .3 & .1 & 1 \\ a_3 & .3 & .2 & .7 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.9} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .5 & 0 \\ 0 & .2 & 1 & 1 \\ .5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & .4 \\ 0 & .2 & 1 \\ 0 & .1 & 0 \\ .2 & 0 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .5 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ .4 & .3 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .4 & .3 & 1 \\ .4 & .3 & 1 \\ .4 & .3 & .7 \\ .4 & .3 & .7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.8} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .6 & .1 \\ 0 & .2 & 1 & 1 \\ .6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & .7 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & .4 & 0 \\ .3 & .1 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .5 & 0 \\ 0 & 1 & .3 \\ .5 & .6 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .5 & .6 & 1 \\ .5 & .6 & 1 \\ .5 & .6 & .7 \\ .5 & .6 & .7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.7} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & .3 \\ 0 & 1 & .7 & .1 \\ 0 & .3 & 1 & 1 \\ .6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .1 & 0 & .9 \\ 0 & .8 & 1 \\ 0 & .8 & 0 \\ .3 & .2 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .7 & 0 \\ 0 & 1 & .4 \\ .5 & .8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .5 & .8 & 1 \\ .5 & .8 & 1 \\ .5 & .8 & .7 \\ .5 & .7 & .7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.6} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & .1 & .5 \\ 0 & 1 & .8 & .1 \\ .2 & .6 & 1 & 1 \\ .7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .3 & 0 & .9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & .1 & 0 \\ .4 & .5 & .8 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .7 & 0 \\ 0 & 1 & .6 \\ .5 & .8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .5 & 1 & 1 \\ .5 & 1 & 1 \\ .5 & 1 & .8 \\ .5 & .8 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.5} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & .2 & .5 \\ 0 & 1 & .9 & .2 \\ .2 & .6 & 1 & 1 \\ .8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .4 & 0 & 1 \\ .1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ .4 & .8 & .8 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .8 & 0 \\ 0 & 1 & .6 \\ .6 & .8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .6 & 1 & 1 \\ .6 & 1 & 1 \\ .6 & 1 & .8 \\ .6 & .8 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.4} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & .5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .4 \\ .2 & .8 & 1 & 1 \\ .8 & 0 & .1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} .8 & 0 & 1 \\ .2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ .9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & .2 \\ 0 & 1 & .8 \\ 1 & .8 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

В матрицах $\underset{\sim}{M}^{*}_{0.3}$, $\underset{\sim}{M}^{*}_{0.2}$, $\underset{\sim}{M}^{*}_{0.1}$, $\underset{\sim}{M}^{*}_{0}$ все элементы равны 1. Выпишем только матрицы $\underset{\sim}{M}_{0.3}$, $\underset{\sim}{M}_{0.2}$, $\underset{\sim}{M}_{0.1}$:

$$\underset{\sim}{M}_{0.3} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .3 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}_{0.2} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .3 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}_{0.1} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

В целом случайные нечеткие инциденции множества A на B характеризуются накопленными вероятностями для всех уровней (табл. 11.7). По этой информации находятся элементарные вероятности инциденций множества A на B для всех уровней (табл. 11.8).

Таблица 11.7

$\underset{\sim}{M}^* =$

		b_1	b_2	b_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	1	1
	.5	.6	1	1
	.6	.5	1	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	1	1
	.5	.6	1	1
	.6	.5	1	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	1	1
	.5	.6	1	.8
	.6	.5	1	.8
	.7	.5	.8	.7
	.8	.5	.6	.7
	.9	.4	.3	.7
	1	.3	.2	.7
a_4	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	1	1
	.5	.6	.8	.8
	.6	.5	.8	.8
	.7	.5	.7	.7
	.8	.5	.6	.7
	.9	.4	.3	.7
	1	.3	.2	.7

Таблица 11.8

		b_1	b_2	b_3
a_1	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.2	0
	1	.3	.1	1
a_2	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.2	.2	0
	1	.3	.1	1
a_3	0	0	0	1
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.4	0	.2
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	.1
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.1	0
	1	.3	.2	.7
a_4	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.4	.2	.2
	.5	.1	0	0
	.6	0	.1	.1
	.7	0	.1	0
	.8	0	.1	0
	.9	.1	.1	0
	1	.3	.2	.7

Теперь по элементарным вероятностям,приведенным в табл. 11.3 и 11.8, найдем математические ожидания для дискретной случайной величины α со значениями 0,0.1,...,0.9,1. Как известно, математическое ожидание дискретной случайной величины определяется как сумма произведений каждого из значений этой величины и вероятности его появления. Таким образом, получим :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.68 & 0.78 & 1 \\ 0.68 & 0.78 & 1 \\ 0.68 & 0.79 & 0.84 \\ 0.68 & 0.74 & 0.84 \end{array}\right] \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.44 & 0 & 0.83 \\ 0.26 & 0.75 & 1 \\ 0.15 & 0.74 & 0 \\ 0.54 & 0.56 & 0.84 \end{array}\right] \end{array}$$

Далее можно найти разность :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} .24 & .78 & .17 \\ .42 & .03 & 0 \\ .53 & .05 & .84 \\ .14 & .18 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Сравнивая эту матрицу с $\varepsilon(\underset{\sim}{M})$, видим, что существенно проявляется скрытое воздействие a_3 на b_3 и a_1 на b_2. Определим теперь, например, для первой пары и каждого уровня α промежуточные факторы, которые не учитываются непосредственно. Для этого используем следующие схемы :

$$\alpha = 1: \; \begin{array}{c} \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & .2 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & .1 & 0 \\ .2 & 0 & .7 \end{array}\right] \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \begin{array}{c} b_3 \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ .3 \\ 1 \end{array}\right] \end{array} = 0.7$$

$$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$$

$$\alpha = 0.9: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ \hline a_2 & 0 & .2 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & .1 & 0 \\ \hline a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .3 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$

$$\alpha = 0.8: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .7 \\ \hline a_2 & 0 & .5 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & .4 & 0 \\ \hline a_4 & .3 & 1 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .3 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$

$$\alpha = 0.7: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .1 & 0 & .9 \\ \hline a_2 & 0 & .8 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & .8 & 0 \\ \hline a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .4 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.7$$

$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$

$$\alpha = 0.6: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .9 \\ \hline a_2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .4 & .5 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .6 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.8$$

$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$

$$\alpha = 0.5: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .4 & .8 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|c|} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ \hline b_2 & .6 \\ \hline b_3 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.8$$

$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$

$$\alpha = 0.4: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .2 & .8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .8 & 0 & 1 \\ .2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ .9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} .2 \\ .8 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 1$$

$$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$$

$$\alpha = 0.3: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .8 & 0 & 1 \\ .3 & 1 & 1 \\ .2 & 1 & 0 \\ .9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} .3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \to \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} \to b_3$$

$$\alpha = 0.2: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ .3 & 1 & 0 \\ .9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{array}[t]{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \to \begin{array}[t]{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \to b_3$$

$$\alpha = 0.1: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ .9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 1$$

$$a_3 \to \begin{array}[t]{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \to \begin{array}[t]{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \to b_3$$

На всех уровнях встречается путь $a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$*, т. е. существенное скрытое воздействие возникает через промежуточные инциденции a_3 на a_4, a_4 на b_3 и b_3 на b_3.

Интересно, что можно сократить расчеты, если композицию проводить прямо над математическими ожиданиями, соответствующими $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{B}$,. Для этого по табл. 11.1, 11.3 и 11.5 вычислим :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0.36 & 0.53 \\ a_2 & 0 & 1 & 0.77 & 0.37 \\ a_3 & 0.21 & 0.59 & 1 & 1 \\ a_4 & 0.75 & 0 & 0.20 & 1 \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.44 & 0 & 0.83 \\ a_2 & 0.26 & 0.75 & 1 \\ a_3 & 0.15 & 0.74 & 0 \\ a_4 & 0.54 & 0.56 & 0.84 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{B}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 0.77 & 0.25 \\ b_2 & 0 & 1 & 0.63 \\ b_3 & 0.68 & 0.72 & 1 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{M}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{B}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.68 & 0.75 & 1 \\ a_2 & 0.68 & 0{,}75 & 1 \\ a_3 & 0.68 & 0.74 & 0.84 \\ a_4 & 0.68 & 0.72 & 0.84 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{M}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{B}) - \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.24 & 0.75 & 0.17 \\ a_2 & 0.42 & 0 & 0 \\ a_3 & 0.53 & 0 & 0.84 \\ a_4 & 0.14 & 0.16 & 0 \end{array}$$

Так же, как и по разности $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M})$, при таком подходе обнаруживаются скрытые воздействия a_3 на b_3 и a_1 на b_2. Для матриц большой размерности, когда большая точность не нужна, целесообразно применять именно этот метод.

В случае оценок, проводимых по доверительным интервалам или экспертонам, методика выявления скрытых воздействий и их промежуточных

* В общем случае для различных уровней такие пути могут быть различными. Тогда целесообразнее выбирать пути, соответствующие бо́льшим уровням.

причин аналогична вышеизложенной. Каким бы ни был тип используемой оценки, предположение о том, что $R \subset E \times E$ (матрица квадратная), упрощает расчеты. При использовании компьютера для анализа важно организовать диалог — фактически речь и идет об экспертной системе.

12. Некоторые свойства нечетких рефлексивных матриц

Рассмотрим три простые теоремы.

Теорема 12.1. Пусть $\underset{\sim}{M}$ - нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

(12.1) $\quad \forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1$.

Тогда $\underset{\sim}{M}^2$ - также нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

(12.2) $\quad \forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, x) = 1$.

Доказательство. По определению имеем $\forall x,y,z \in E$

(12.3) $\quad \mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, z) = \bigvee_y (\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(y, z))$.

Если $z = x$, то $\mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, x) = \bigvee_y (\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(y, x))$.

Из всех пар (x, y) существует по крайней мере одна, для которой $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)=1$, в частности при $y = x$ $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1$, но тогда

$$\mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, x) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Поэтому можно считать, что если $\underset{\sim}{M}$ рефлексивна, то $\underset{\sim}{M}^2$ рефлексивна, или, в более общей форме, если $\underset{\sim}{M}$ рефлексивна, то $\underset{\sim}{M}^r$ рефлексивна при $r = 2,3,4,...$

Теорема 12.2. Если $\underset{\sim}{M}$ - нечеткая рефлексивная матрица, то $\forall x,y \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)$, т. е. $\underset{\sim}{M}^2 \supset \underset{\sim}{M}$.

Доказательство. В правой части формулы (12.3) под знаком $\bigvee_y$ имеются по крайней мере два одинаковых члена (при $x \neq y$ для $y=x$ и $y=z$). Тогда $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, z) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z)$, поскольку $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z) = 1$.

Следовательно, $\mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, z)$ по крайней мере равно $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$, так как все выражение с $\bigvee_y$ не может быть меньшим. Более того, может существовать $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$, большее,чем $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$. Поэтому

$$\forall x,y \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)$$

т. е. $\underset{\sim}{M}^2 \supset \underset{\sim}{M}$ или в более общей форме $\underset{\sim}{M}^{r+1} \supset \underset{\sim}{M}^r$, $r=1,2,3,...$

Теорема 12.3[*] . Если $\underset{\sim}{A}_{m\times m}$ и $\underset{\sim}{B}_{n\times n}$ -нечеткие рефлексивные матрицы и найдено $\underset{\sim}{M}^{*}_{m\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n}$, то $\underset{\sim}{M}^{*}_{m\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Доказательство. Пусть $\underset{\sim}{A}_{m\times m}$-единичная матрица, тогда $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} = \underset{\sim}{M}_{m\times n}$, но можно записать : $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m}$, и поэтому $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} = \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Аналогично, если $\underset{\sim}{B}_{n\times n}$ - единичная матрица, имеем $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}$, и так как $\underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{B}_{n\times n}$, получаем $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset (\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}$. С учетом (12.4) находим $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Так как операция $\circ$ ассоциативна, то $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$ или в более общей форме $\underset{\sim}{A}^{r+1}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}^{r+1}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}^{r}_{n\times n}$.

Эти теоремы использовались ранее в числовых примерах. Все они без затруднений переносятся на Ф-нечеткие матрицы, случайные нечеткие матрицы и матрицы с экспертонами, естественно, с сохранением специфики элементов, используемых в каждом из этих расширений.

13. Некоторые дополнительные приемы выявления скрытых воздействий

Если $\underset{\sim}{M}^{12}_{m\times n}$- нечеткая матрица, задающая инциденции E_1 на E_2 и $\underset{\sim}{M}^{23}_{n\times p}$- нечеткая матрица, задающая инциденции E_2 на E_3, то может представлять интерес значение инциденций E_1 на E_3 через инциденции E_1 на E_2 и E_2 на E_3. В этом случае рассчитываем $\underset{\sim}{M}^{13}_{m\times p} = \underset{\sim}{M}^{12}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{M}^{23}_{n\times p}$.

Скрытые воздействия можно выявить, если априори установлена $\underset{\sim}{M}^{13}$ для непосредственных инциденций E_1 на E_3. Между элементами $\underset{\sim}{M}^{13}$ и $\underset{\sim}{M}^{13}$ существуют любые соотношения, и соответственно отклонения могут быть положительными, нулевыми или отрицательными. Если некоторые отклонения оказались существенными, то устанавливаются промежуточные инциденции и матрица уточняется. Рассмотрим пример. Пусть задана матрица инциденций A на C :

[*] Это утверждение приведено в § 6, а здесь дается его строгое доказательство.

$\underset{\sim}{M}_{AC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	.2	1	.6	1
a2	.5	.2	.5	.2
a3	.4	.8	1	.3

Пусть, кроме того, имеются матрицы инциденций А на В и В на С:

$\underset{\sim}{M}_{AB} =$

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	.7	.8	0	.4	1
a2	1	1	.2	0	.3
a3	0	.4	0	.7	.5

$\underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
b1	.3	.2	.4	1
b2	0	.3	.5	.9
b3	.8	.4	.5	0
b4	0	.3	.6	.9
b5	.8	.8	1	1

Для этих матриц найдем

$\underset{\sim}{M}_{AB} - \underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	.8	.8	1	1
a2	.3	.3	.5	1
a3	.5	.5	.6	.7

Вычислим отклонения :

$\underset{\sim}{M}_{AC} - \underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	-0.6	0.2	-0.4	0
a2	0.2	-0.1	0	-0.8
a3	-0.1	0.3	0.4	-0.4

Видно, что существенное отклонение соответствует паре (a_2, c_4). Для этой пары восстановим все промежуточные инциденции через В (рис 13.1).

Очевидно, что рассматриваемое отклонение определяется на путях $a_2 \to b_1 \to c_4$ и $a_2 \to b_2 \to c_4$. Аналогичным образом можно было бы изучать найденное отклонение, соответствующее паре (a_1, c_1).

Перейдем сейчас к расмотрению другого возможного случая. Пусть определены матрица $\underset{\sim}{A}$ инциденций А на А (квадратная рефлексивная матрица) и прямоугольная матрица $\underset{\sim}{M}_{AB}$ инциденций А на В. Вычислим $\underset{\sim}{M}_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB}$. Как показано в предыдущем параграфе, $\underset{\sim}{M}_{AB} \supset \underset{\sim}{M}_{AB}$.

Вычислим разность $\underset{\sim}{M}_{AB} - \underset{\sim}{M}_{AB}$, которая используется для выявления скрытых воздействий. Подобным образом при наличии инциденций А на В и В на В вычисляется $\underset{\sim}{M}''_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB}$ и разность $\underset{\sim}{M}''_{AB} - \underset{\sim}{M}_{AB}$. Свойство ассоциативности операции $\circ$ дает отношение $\underset{\sim}{M}'''_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{B}$, которое уже использовалось ранее.

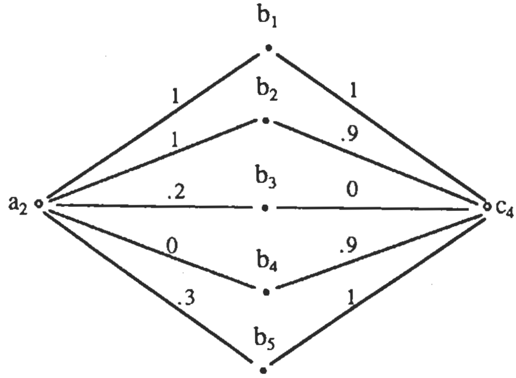


Рис 13.1

Изложенные приемы раскрывают широкие возможности для разработки новых процедур.